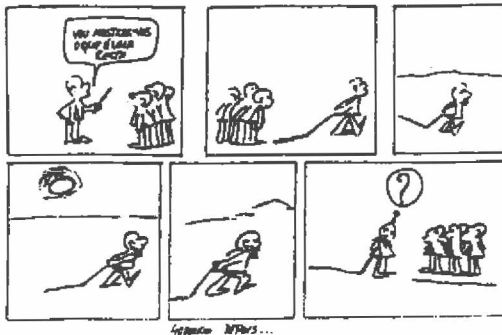


SOBRE AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDEANAS

ANTÓNIO JÚLIO TOUCINHO DA SILVA*



Depois de observar esta figura, será que ainda se mantém inabalável o seu conceito de linha recta? Ainda fará sentido afirmar que dada uma recta cada um dos seus pontos a divide em duas partes distintas?

Os postulados de Euclides.

Para a esmagadora maioria das pessoas a geometria é a geometria elementar que nos é ensinada no ensino básico. Trata-se de uma geometria quase sempre plana¹, com uma forte carga intuitiva e geralmente apoiada em representações gráficas mais ou menos evidentes. Outras pessoas vão mais além e identificam essa geometria elementar com a geometria euclidiana podendo porventura interrogar-se sobre a existência de outras geometrias.

Essas outras geometrias existem de facto, como aliás o título deste artigo deixa entender, e é sobre o que são essas geometrias não euclidianas e sobre as razões pelas quais aparecem, que nos vamos debruçar.

A antiga civilização grega, cujo auge ocorreu há mais de dois mil anos, foi o berço da matemática como ciência. Entre as classes sociais mais cultas estudava-se filosofia e geometria. Durante o seu apogeu a matemática em geral, e a geometria em particular, tiveram grande desenvolvimento, nomeadamente através das escolas criadas por pensadores como Pitágoras. Por outro lado, os gregos dedicaram-se também à compilação do conhecimento científico em grandes obras que, regra geral, são as mais antigas que chegaram até nós. Foi com os gregos que surgiu a axiomática, a qual incluía o princípio de dedução lógica, que permite inferir uma afirmação a partir de outras anteriormente aceites. Um exemplo do que temos vindo a afirmar encontra-se em Euclides de Alexandria que, cerca de 300 A.C. produziu os famosos Elementos, obra em 13 volumes que, depois da Bíblia, terá sido o texto mais estudado e reproduzido em todo o mundo. De facto, durante dois séculos ensinou-se e estudou-se a Geometria de Euclides "como se fora um modelo exemplar do método hipotético-dedutivo (ou axiomático) em matemática".² O trabalho de Euclides baseia-se na dedução lógica de teoremas a partir de termos primitivos³ e

* Docente da ESE de Beja

de postulados ⁴, em número de cinco, com que procurou criar um sistema de definições e formas de demonstração de propriedades do espaço em que vivemos.

Na sua obra, Euclides, que sentiu necessidade de definir também os termos primitivos, começa por apresentar 23 definições, entre elas as de ponto, linha, linha recta, superfície plana, círculo, etc. De seguida apresenta cinco axiomas (noções de carácter geral como por exemplo "coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais uma à outra") a que se seguem os famosos Postulados de Euclides, a saber:

P.E.1: Conduzir uma linha recta de qualquer ponto a qualquer ponto.

P.E.2: Prolongar continuamente uma linha recta finita numa linha recta. ⁵

P.E.3: Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

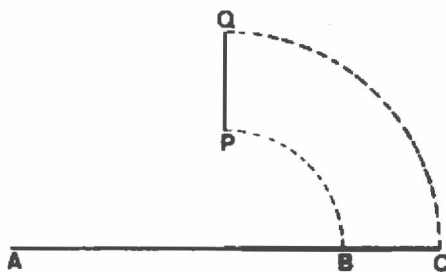
P.E.4: Todos os ângulos rectos são iguais uns aos outros.

P.E.5: Se uma linha recta caindo sobre duas linhas rectas faz os ângulos internos do mesmo lado menores que dois ângulos rectos, então as duas linhas rectas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se no mesmo lado em que os dois ângulos são menores que dois ângulos rectos.

ou, reformulados para a nossa linguagem,

P.E.1': dados dois pontos distintos A e B existe uma única recta r passando por A e por B

P.E.2': Todo o segmento de recta $[AB]$ se pode prolongar por um segmento de recta geometricamente igual ⁶ a um segmento de recta dado $[PQ]$.



P.E.3': Para todo o ponto O e todo o ponto A distinto de O existe uma circunferência de centro O e raio $[OA]$.

P.E.4': Todos os ângulos rectos são geometricamente iguais.

P.E.5': (na redacção dada por Playfair) ⁷: Para toda a recta r e todo o ponto P não em r , existe uma única recta s que passa por P e é paralela a r

Sobre o "Postulado das Paralelas".

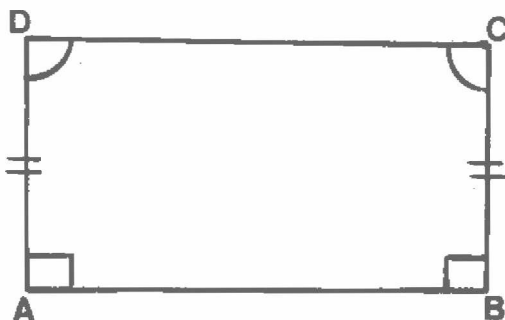
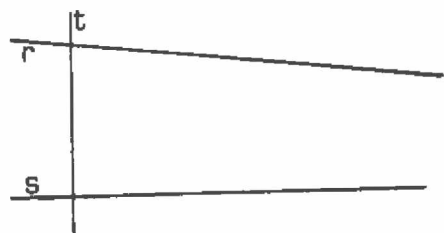
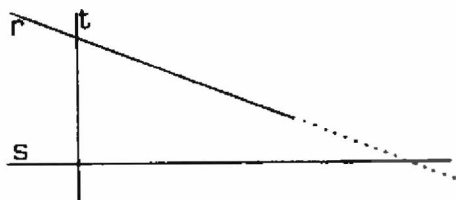
Este último postulado é também conhecido por Postulado das Paralelas e é ele que caracteriza a geometria euclidiana. Os quatro primeiros postulados podem considerar-se fruto da nossa experiência ao trabalhar com régua, esquadros, compassos e outros instrumentos de desenho. Contudo isso já não acontece com o quinto postulado pois só temos experiência de trabalho com segmentos de recta e não com linhas rectas ilimitadas. A ideia de Euclides é que, se por um ponto exterior a uma recta r , fizermos passar uma outra recta s tal que traçando uma transversal t às rectas r e s a "soma" dos ângulos internos de um mesmo lado é inferior a dois ângulos rectos, as rectas r e s encontram-se exactamente num ponto, do mesmo lado de t que aqueles dois ângulos (ver figura seguinte). Ao longo dos séculos foram várias as tentativas de demonstração do postulado das paralelas com bases nos

restantes quatro postulados. Contudo, as várias tentativas, entre as quais se contam as de Proclus (410-485), Wallis (1616-1703), Saccheri (1667-1733) e Legendre (1752-1833), fracassaram já que se basearam em suposições não justificadas, ou em suposições que já são consequência do postulado, resultando assim demonstrações circulares. Este problema apaixonou os matemáticos ao longo dos tempos sem que se lhe encontrasse uma solução, o que é bem ilustrado por um conselho que o matemático húngaro Farkas Bolyai deu a seu filho. Tendo passado mais de metade da sua vida tentando demonstrar, sem sucesso, o postulado das paralelas, quando descobriu que o seu próprio filho Janos Bolyai (1802-1860) também andava absorvido pelo problema das paralelas, ter-lhe-á dito: "Por amor de Deus te peço, esquece. Teme-o como às paixões sensuais porque, como elas, pode chegar a absorver todo o teu tempo e privar-te da saúde, da paz de espírito e da felicidade da vida".⁸ De facto, apesar de possível, o encontro das rectas r e s naquelas condições pode não ser necessário, como lembrou Proclus que deu o exemplo de uma hipérbole que se aproxima

ma das suas assíntotas sem as interceptar. Claro que qualquer um poderá desejar fazer a demonstração com régua e lápis. Mas a Geometria não é uma arte gráfica nem uma disciplina de desenho, nem a evidência intuitiva pode substituir um tratamento lógico rigoroso em que todas as afirmações importantes devem ser demonstradas. E, por outro lado, por muito rigoroso que seja o desenho, ele será uma forma grosseira de representação de um problema, limitada pelas características físicas do desenhador e dos instrumentos gráficos.

O trabalho de Saccheri.

Para o aparecimento das geometrias não euclidianas muito contribuiu o trabalho do italiano Girolamo Saccheri. Este frade jesuíta levou a cabo a primeira investigação verdadeiramente científica sobre o postulado das paralelas, que procurou demonstrar por redução ao absurdo, a partir dos quatro primeiros postulados de Euclides. Para o efeito aceitou as primeiras proposições dos Elementos, que não dependem do postulado das paralelas, e a partir delas criou um quadrilátero $[ABCD]$, com os ângulos dos vértices A e B rectos e com os lados $[AD]$ e $[BC]$ iguais, que veio a ficar conhecido por quadrilátero de Saccheri. Com o recurso às propo-



Quadrilátero de Saccheri

sições aceites, Saccheri demonstrou, como hoje qualquer estudante do nosso ensino secundário poderia fazer, que os ângulos dos vértices D e C são iguais. Seguidamente, como esses ângulos podem ser

ambos rectos, agudos ou obtusos, decidiu estudar essas três hipóteses, a que chamou hipótese do ângulo recto, hipótese do ângulo agudo e hipótese do ângulo obtuso. Saccheri pretendia aceitar separadamente as duas últimas hipóteses para, por redução ao absurdo, as rejeitar e demonstrar assim o postulado euclideano do paralelismo que é equivalente à hipótese do ângulo recto. O plano de trabalho funcionou e Saccheri rapidamente rejeitou a hipótese do ângulo obtuso mas, quanto à hipótese do ângulo agudo, a tarefa mostrou-se muito mais difícil e, depois de muito trabalho, Saccheri acabou por forçar indevidamente o aparecimento de uma contradição. Hoje não há dúvidas de que, aceitando a hipótese do ângulo agudo, não se encontra qualquer contradição, ao contrário do que pretendia Saccheri. Assim, podemos construir, com base nos quatro primeiros postulados de Euclides acrescentando-lhes a hipótese do ângulo agudo, uma geometria tão consistente como a euclideana, o que quer dizer que o quinto postulado de Euclides é independente dos quatro primeiros, pelo que não se pode deduzir a partir deles. Os primeiros a suspeitar realmente deste facto foram Gauss⁹ (1777-1855), Janos Bolyai, de que já falámos, e Lobatchevsky (1793-1856).

A libertação da geometria.

Acabámos assim de ver que a geometria euclideana se fundamenta num postulado, que é uma hipótese aceite, mas que no lugar dela poderíamos aceitar uma outra com a qual se poderia construir uma geometria com uma estrutura lógica tão consistente como a geometria euclideana. Note-se que a hipótese do ângulo recto equivale ao postulado euclideano do paralelismo, a hipótese do ângulo agudo equivale a afirmar que por um ponto exterior a uma recta passa mais do que uma recta paralela a essa recta (postulado hiperbólico do paralelismo) e a hipótese do ângulo obtuso equivale a afirmar que por um ponto exterior a uma recta não passa nenhuma recta paralela a ela (postulado elíptico

do paralelismo)¹⁰. Assim, aceitando diferentes postulados do paralelismo, estes irão ter consequências diferentes, pelo que estaremos a construir geometrias diferentes, isto é, com teoremas e propriedades diferentes. Um exemplo elucidativo é o teorema relativo à soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo. Para a geometria euclideana ela é 180° , se aceitarmos a hipótese do ângulo agudo é inferior a 180° numa geometria que aceite a hipótese do ângulo obtuso. Como a consequência da descoberta da independência do postulado do paralelismo, nasceram outras geometrias - as não euclidianas - mas, mais do que isso, essa descoberta representou a libertação da geometria dos moldes tradicionais. A geometria euclideana foi posta em causa como a Geometria Verdadeira e tornou-se evidente que o espaço euclideano tridimensional não é mais que uma ficção, um modelo de entre os vários modelos de mundo que se poderão escolher para representar o mundo que nos rodeia. Por outro lado, também toda a fundamentação lógica da geometria de Euclides se mostrou deficiente e teve de ser reformulada no fim do século passado, mais concretamente em 1899, por David Hilbert (1862-1943) nos seus famosos "Fundamentos de Geometria".

Geometria Neutra.

Como podemos adoptar vários postulados do paralelismo, também poderemos não adoptar nenhum. Assim, podemos interrogar-nos sobre que teoria geométrica teremos se adoptarmos os quatro primeiros postulados e não adoptarmos nenhum sobre as paralelas? A geometria que daí resulta, designada geometria neutra¹¹, é assim uma teoria cujos teoremas se deduzem dos postulados de Euclides sem recorrer, directa ou indirectamente, ao postulado euclideano das paralelas. São vários os teoremas da geometria neutra e têm um carácter pouco definido reflectindo a falta de um postulado do paralelismo. Isto fica bem exemplificado através do conhecido teorema de Saccheri-Legendre

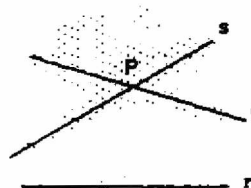
(segundo o qual a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a 180°) e pela impossibilidade de garantir que por um ponto exterior a uma recta passa uma única recta paralela a uma recta dada. Contudo, essa indefinição desaparece quando se adopta um postulado do paralelismo.¹²

Geometria de Lobatchevsky.

Ao invés de causar contradições, a hipótese do ângulo agudo tornou-se o nascimento das geometrias não euclidianas. Saccheri e os seus contemporâneos não se aperceberam deste verdadeiro significado. Só mais tarde, e de forma independente, Gauss, Janos Bolyai e Nicolai Ivanovitch Lobatchevsky compreenderam o nascimento de novas geometrias que possam não ter por base o postulado euclideano das paralelas. Gauss não chegou a publicar uma palavra sobre o assunto. Bolyai fê-lo mas viu-se relegado para segundo plano pela publicação, em primeiro lugar, das ideias de Lobatchevsky. Daí que a geometria neutra que se baseia na hipótese do ângulo agudo seja conhecida por geometria de Lobatchevsky ou geometria lobatchevskiana.

Mas o que é afinal essa geometria? É uma geometria neutra (com base nos primeiros quatro postulados de Euclides) que adopta o axioma: dada uma recta r e um ponto P não em r , com planar com r , existe mais do que uma recta que passa por P e é paralela a r . Para uma mais fácil compreensão imaginemo-nos membros de uma cultura bacteriana que vive numa caixa de vidro de base circular, num laboratório. Nestas condições, o mundo destas bactérias é um mundo plano e circular. Neste mundo o plano é o círculo (que vamos considerar aberto) que constitui o fundo da caixa, os pontos são os pontos do círculo e as rectas as cordas do círculo, como a figura seguinte exemplifica. É fácil concluir que este modelo verifica o postulado hiperbólico do paralelismo, isto é dada uma recta r e um ponto P , não em r , por P passam várias rectas paralelas a r , entendendo por rectas paralelas rectas que não

têm pontos comuns. É evidente que neste mundo a geometria assim definida tem ca-



Por P passam s e t , ambas paralelas à "recta" r

racterísticas diferentes da geometria euclidiana a que estamos habituados. Por exemplo, duas rectas paralelas não são equidistantes.

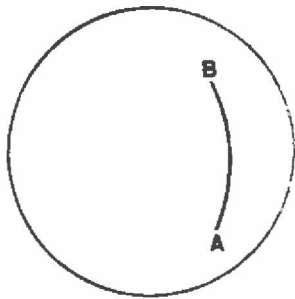
A geometria hiperbólica de Lobatchevsky é uma geometria puramente abstracta, "artificial" e o mundo bacteriano que estávamos a imaginar é uma interpretação, um modelo, uma realização concreta que permite garantir a não contradição do sistema de axiomas e "visualizar" o conceito de paralelismo da teoria geométrica em estudo.¹³

Como não é nossa intenção aprofundar o estudo da geometria hiperbólica, mas apenas dar ao leitor uma ideia do que é e de como nasceu, não nos vamos alongar mais sobre ela.

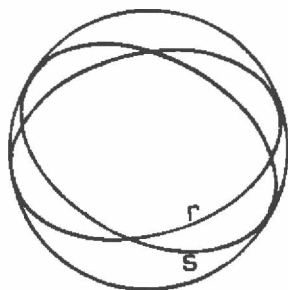
Geometria Riemanniana.

Pode dizer-se que, depois de quebrado o gelo por Bolyai e Lobatchevsky, os matemáticos do século XIX procuraram definir novas geometrias. Delas, a primeira e a melhor foi a proposta por Riemann em 1854 que contradiz o postulado euclideano das paralelas assumindo, em sua alternativa, que "não existem rectas paralelas", ou seja que por um ponto P exterior a uma recta r não passa nenhuma recta paralela a r ou, de outra forma, qualquer recta passando por P intersecta r ¹⁴. Esta geometria é radicalmente diferente das anteriores, não é uma geometria neutra uma vez que é inconsistente com os primeiros postula-

dos de Euclides. De facto, esta teoria geométrica colide com todos os postulados anteriores que envolvam as noções de distância e de estar entre, bem como com o carácter infinito do conceito de linha recta. Mas, para melhor se compreender tudo isto, não há nada melhor que recorrer a um modelo. Assim, consideremos a superfície de uma esfera, por exemplo a superfície do nosso planeta. Nesta superfície existem muitos caminhos (linhas curvas) que ligam dois pontos mas o mais curto é o que é parte de um "círculo máximo" (intersecção da superfície esférica com um plano que passa pelo seu centro). Assim, neste modelo, podemos entender por plano a superfície esférica, por ponto um dos seus pontos e por recta um "círculo máximo", como



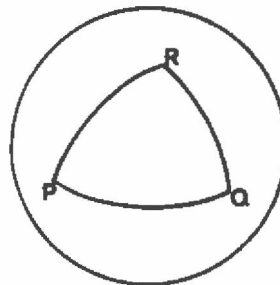
Caminho mais curto entre dois pontos



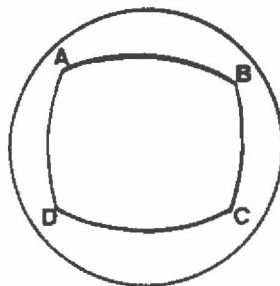
Doas "rectas" têm dois pontos comuns

a figura inicial sugere. Contudo, nesta geometria esférica acontecem coisas que talvez não esperássemos: duas rectas distintas têm dois pontos comuns; dado um

ponto de uma recta esse ponto não a separa em duas partes distintas; a soma das amplitudes dos ângulos internos de um



Um triângulo tem soma angular superior a 180°



Um rectângulo tem soma angular superior a 360°

triângulo é maior que 180° ; dados três pontos A, B e C de uma mesma recta, qualquer um deles está entre os outros dois, isto é A está entre C e B, B está entre C e A e C está entre B e A. Como se pode ver, esta teoria geométrica é profundamente diferente da geometria euclideana e da geometria neutra. Contudo, tem uma grande aplicação em matemática e em física, como veremos adiante.

Ainda sobre a "soma dos ângulos internos" de um triângulo.

Vivemos, sem dúvida alguma, num universo misterioso. Até ao aparecimento da teoria da relatividade, de Einstein, supôs-se sempre o espaço físico como um espaço euclideano, isto é onde são válidos

os axiomas e teoremas de geometria euclidiana. E mesmo depois do aparecimento de geometrias não euclidianas, revelou-se sempre tarefa difícil conceber uma descrição do universo melhor que a geometria de Euclides. Contudo, a teoria da relatividade geral tem a sua base matemática na geometria de Riemann, sugerindo assim que o espaço físico não é euclidiano.

Pela mesma altura em que Bolyai e Lobatchevsky desenvolviam a sua geometria não euclidiana, o grande matemático alemão Karl Friedrich Gauss levou a cabo uma experiência sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo. Como para a geometria de Euclides essa soma é 180° , para a de Lobatchevsky é menor que 180° e para a riemanniana é superior a 180° , Gauss pretendia, em última instância, decidir sobre qual a melhor descrição do universo físico: se a geometria euclidiana, a lobatchevskiana ou a riemanniana. Para tanto mediu a amplitude dos ângulos de um triângulo gigante, com lados de comprimento entre os 60 e os 110 quilómetros, cujos vértices se localizavam no topo de três montanhas na Alemanha. O resultado obtido é muito escassamente superior a 180° , pelo que, admitindo um erro provocado pelo limite de precisão dos instrumentos utilizados, teoricamente temos de admitir que o valor real medido tanto pode ser 180° , como inferior ou superior. A experiência de Gauss resultou pois inconclusiva porque, para as geometrias não euclidianas, quanto "menor" for o triângulo mais próxima dos 180° estará aquela soma. De facto, as geometrias não euclidianas não admitem modelos à escala, isto é nelas dois triângulos só são semelhantes se forem iguais (congruentes). Sendo assim, só poderemos concluir que o espaço físico é, ou não, euclidiano se levarmos a cabo a experiência de Gauss relativamente a um triângulo cujos vértices estejam localizados por exemplos em estrelas.

Uma objecção.

Podemos objectar que as geometrias não-euclidianas não correspondem à realidade física, mormente a hiperbólica de

Lobatchevsky, mas o mesmo poderá dizer a geometria riemanniana da euclidiana. Esta questão foi colocada pelos matemáticos que deram origem às novas geometrias, preocupados com a validade empírica dos novos postulados do paralelismo. O que podemos dizer sobre esta questão é que, para o matemático, o que importa são as conclusões, que de forma lógica se podem tirar de determinados postulados, e que a validade dessas conclusões não depende da verdade ou falsidade dos argumentos que lhes serviram de base. Mas apesar disso, fará sentido basear uma geometria em axiomas manifestamente falsos quando aplicados à realidade física? Tentemos uma resposta. Em primeiro lugar qualquer um de nós é livre de escolher argumentos base e de estudar as suas consequências, independentemente da sua validade empírica ou de considerações de ordem prática. Em segundo lugar uma proposição matemática é sempre abstracta, isto é a sua validade empírica depende dos termos primitivos que usa e, por isso, um postulado pode ser verdadeiro quando se entende por recta um cordel esticado e falso quando se considera recta um raio de luz. Finalmente, a determinação da verdade empírica de uma proposição cai no domínio das ciências experimentais, pelo que é tarefa que compete aos físicos, biólogos, astrónomos, etc. E não nos devemos esquecer que averiguar da veracidade empírica de uma afirmação envolve problemas com que, à partida, poderíamos não contar. De facto, para testar se, num plano, por um ponto exterior a uma recta passa apenas uma recta paralela à recta dada, que material deveríamos usar? Cordas, linhas desenhadas num quadro ou raios de luz? E como poderíamos afirmar que aquela recta é única? Será que temos conhecimentos suficientes sobre o espaço físico que nos permitam assegurar tal unicidade?

Conclusão.

Não se pode afirmar que qualquer das três geometrias, euclidiana, riemanniana e lobatchevskiana é mais correcta do que as outras, nem é correcto afirmar que

a geometria euclideana é a geometria das linhas rectas e que as outras são geometrias das linhas curvas. De facto todas elas são geometrias que estudam linhas rectas, apenas não estão completamente de acordo quanto às propriedades da rectilinearidade.

O aparecimento de teorias geométricas não euclidianas representou uma libertação da geometria e o rompimento com uma convicção de mais de dois mil

anos. Permitiu a criação de diferentes sistemas geométricos e de geometrias puramente artificiais, deixando assim a geometria de estar amarrada ao espaço físico. Os sistemas de postulados tornaram-se meras hipóteses, cuja veracidade física não diz respeito à matemática pois a esta apenas interessa a consistência daqueles. A geometria tornou-se comparável a um jogo cuja natureza depende das regras com que se joga!

TABELA DE COMPARAÇÃO DE GEOMETRIAS EUCLIDEANA LOBATCHEVSKIANA E RIEMANIANA

	Euclideana	Lobatchevskiana	Riemaniana
Duas rectas distintas intersectam-se	em 1 ponto (no máximo)	em 1 ponto (no máximo)	em exactamente 1 ou 2 pontos*
Dada uma recta r e um ponto P não em r há	uma única recta que passa por P e é paralela a r	pelo menos duas rectas passando por P paralelas a r	não há rectas paralelas a r
Uma fica separada em duas partes por um dos seus pontos?	sim	sim	não
Rectas paralelas são equidistantes?	sim	nunca são equidistantes	não existem
Se uma recta intersecta uma de duas rectas paralelas deve intersectar a outra?	sim	pode intersectar ou não	
Duas rectas distintas perpendiculares a uma mesma recta	são paralelas	são paralelas	intersectam-se
A "soma" dos ângulos internos de um triângulo é	180°	menor que 180°	maior que 180°

* 1 na geometria elíptica simples e 2 na geometria elíptica dupla.

NOTAS:

(1) Até aqui a geometria estudada no nosso ensino básico tem ficado pelo nível bidimensional. A geometria do espaço (tridimensional) surge pela primeira vez e apenas no programa do 9º ano de escolaridade mas frequentemente não é ensinada por falta de tempo (?) para o cumprimento do programa.

(2) in **Oliveira, A.J. Franco** - "Geometria" - Universidade de Évora, 1988, p.2.

(3) Os termos primitivos são noções do domínio comum que não se definem, a partir das quais se formam outras noções mais complicadas. É o caso das noções de ponto, recta, plano, etc, a partir das quais se constroem definições mais complexas.

(4) Os postulados ou axiomas (hoje não se faz distinção entre uns e outros) são afirmações que se aceitam como verdadeiras (geralmente de carácter evidente) que servem de base à demonstração de todas as outras proposições: os teoremas.

(5) Como se pode ver o conceito de recta em Euclides é diferente do hoje generalizado.

(6) Hoje usa-se a expressão geometricamente igual (a nível elementar) e congruente (num nível superior). Não se diz simplesmente que duas figuras são iguais porque, sendo as figuras conjuntos de pontos e dois conjuntos dizem-se iguais se constituídos pelos mesmos pontos, elas só poderiam ser iguais se fossem uma só. Assim, usam-se aquelas expressões para uma noção de igualdade mais geral que a de identidade.

(7) **John Playfair** (1748-1819), matemática e físico escocês.

(8) in **Boyer, Carl B.** - "Historia de la Matemática" - Alianza Editorial, Madrid, 1986, p.674.

(9) **Carl Friedrich Gauss**, matemático alemão geralmente considerado com Arquimedes e Newton, um dos três maiores matemáticos de todos os tempos. Poderá ter sido o primeiro a aperceber-se do facto do postulado das paralelas ser independente dos postulados anteriores

mas não publicou essas suspeitas com receio da polémica que poderia provocar.

(10) As designações postulado hiperbólico, postulado parabólico e postulado elíptico devem-se a Felix Klein (1849-1925) que, no seu programa Erlanger apresenta uma classificação das diferentes geometrias com base no conceito de transformação.

(11) Também designada geometria absoluta traduzindo a ideia de que os quatro primeiros postulados de Euclides são inquestionáveis.

(12) Designam-se neutras as geometrias que adoptam os primeiros quatro postulados euclidianos e um postulado do paralelismo. Assim, são geometrias neutras e geometria euclídea e, como veremos, a geometria de Lobatchevsky.

(13) Um modelo interessante para esta geometria, é o apresentado por Poincaré (1854-1912), que se pode encontrar em "Les Fondements de la Géométrie", p. 243 (ver bibliografia).

(14) Na realidade existem duas teorias geométricas baseadas no postulado do paralelismo de Riemann: a geometria elíptica simples e a geometria elíptica dupla. As designações simples e dupla devem-se ao facto de num caso duas rectas não coincidentes terem sempre um único ponto e, no outro caso, terem sempre dois pontos comuns. Para a segunda teoria podemos construir um modelo numa superfície esférica e, para a primeira, na superfície de uma semisfera.

BIBLIOGRAFIA

BOYER, Carl B. - *Historia de la Matemática* - Alianza Editorial, Madrid, 1986.

EVES, Howard - *An Introduction to the History of Mathematics* - 5ª edição, Saunders College Publishing, 1983.

LELONG-FERRAND, J. - *Les Fondements de la Géométrie*- P.U.F.

JACOBS, H. R. - *Geometry* - 2ª edição, W. H. Freeman & Company, N.Y., 1987.

OLIVEIRA, A. J. Franco de - "Geometria" - Universidade de Évora, Évora, 1988.

OLIVEIRA, A. J. Franco de - *Geometria* - edição manuscrita, Universidade de Évora, s.d.

SILVA, J. Sebastião e - "Introdução ao estudo das geometrias baseado no concei-

to de transformação" - in *Gazeta de Matemática*, nº 35, Fevereiro de 1948.

STRUIK, j. Dirk - *História Concisa das Matemáticas* - Gradiva, Lisboa, 1989.

LEIA

O GIRALDO

**O
SEU
MENSÁRIO
ALENTEJANO**

MARTINS & BAILÃO, LDA.



***EMPREITEIROS
DE OBRAS PÚBLICAS
E CONSTRUÇÃO CIVIL***

VENDA DE LOJAS E APARTAMENTOS



24136

RUA ANTÓNIO SARDINHA Nº 37 * 7 800 BEJA**

**OUÇA DIARIAMENTE
DAS 6 às 2 da MANHÃ**

FM - 104.5 Mhz



**Rua da Misericórdia, 4 - Telef. 26477
7 800 BEJA**