NÚMEROS IRRACIONAIS: O QUE SÃO?

A. J. TOUCINHO DA SILVA *

O conceito de número, que terá surgido como uma abstracção a partir do processo de contagem dos elementos de conjuntos finitos, evoluiu ao longo dos tempos acompanhando, não só o desenvolvimento das técnicas de cálculo, mas também as formas de ver e entender o mundo. Os primeiros conceitos de número tinham a ver apenas com os números inteiros mas, para além da contagem dos elementos de conjuntos finitos, de um rebanho por exemplo, a vida prática impunha a necessidade de fazer medições, como é o caso de comprimentos, pesos, tempo, etc, o que implica o uso de fracções. Daqui terá nascido uma extensão do conceito de número aos números racionais.

fig. 1 Tomando $\overline{UV}$ por unidade de medida, $\overline{PQ} = 3$ e $\overline{RS} = 5$ donde $\frac{\overline{PQ}}{\overline{RS}} = \frac{3}{5}$

Na antiga Grécia existiu um grupo de filósofos virados para a matemática, os chamados pitagóricos, cuja escola foi fundada pelo muito conhecido **Pitágoras**. Na procura de leis eternas do universo, os pitagóricos tentaram reduzir tudo a relações numéricas a partir das propriedades dos números - os inteiros, designados **arithmoi**. Neste particular assumia especial relevância a teoria das proporções que tinha por base a ideia de que todas as medidas seriam comensuráveis. Vejamos melhor este conceito através do exemplo da figura 1. Se designarmos por **a** e por **b**, respectivamente, as medidas dos comprimentos dos segmentos PQ e RS, esses comprimentos seriam comensuráveis se existisse uma unidade de medida, tal que **a** e **b** fossem simultaneamente múltiplos dela, isto é se por exemplo existisse um segmento UV tal que designado por c a medida do seu comprimento, se tivesse $a = kc$ e $b = mc$, com k e m inteiros, donde seria possível exprimir a razão entre os comprimentos dos segmentos PQ e RS por k/m. De acordo com este raciocínio, os números racionais, isto é os inteiros e os fraccionários, eram suficientes para traduzir ou quantificar a realidade conhecida e para resolver os problemas da vida prática. Estes números têm uma interpretação geométrica simples. Consideremos uma linha recta r e dois pontos O e M em r. Se a O fizermos corresponder o número 0 e a M o número 1, podemos fazer corresponder a cada número in-

* Docente da ESE de Beja

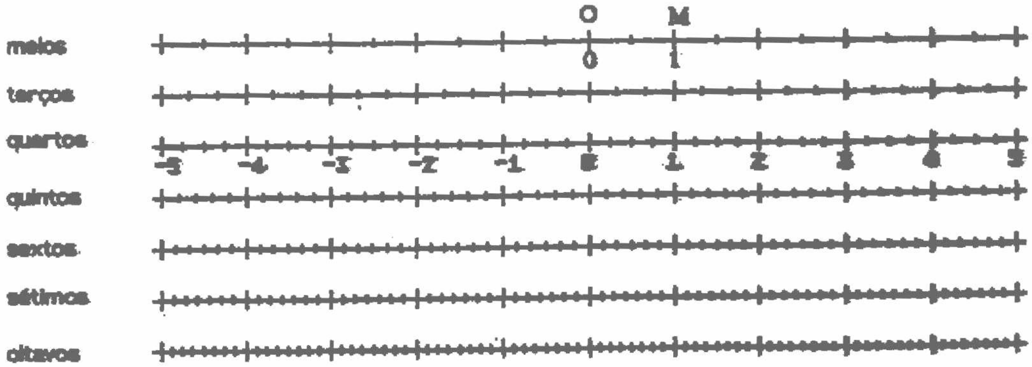
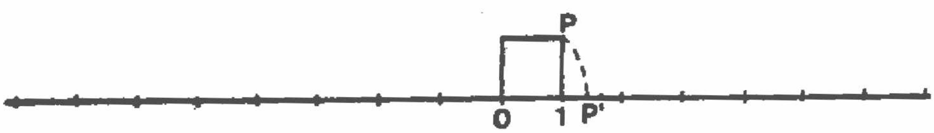


fig. 2

teiro um ponto da recta, representando a partir de O e de M segmentos de recta iguais ao segmento OM. Desta forma podemos representar sobre a recta r os números inteiros positivos, por exemplo para a direita de O, e os negativos para a esquerda. Assim, os números fraccionários de denominador **p** podem ser representados pelos pontos que dividem os segmentos anteriores em **p** partes iguais, como mostra a figura 2. Aos matemáticos da antiguidade parecia evidente que, desta forma, todos os pontos de recta r seriam utilizados na representação dos números racionais. Foi um tremendo choque verificar que existem pontos da recta que não correspondem a nenhum número racional, como por exemplo o ponto P' que corresponde à medida do comprimento da diagonal de um quadrado de lado um. Esta descoberta foi um dos maiores contributos dos pitagóricos para a evolução da Matemática.



De facto, pelo teorema de Pitágoras, sabemos que aquela medida é $\sqrt{2}$ e não é um número racional, isto é não se pode escrever como a razão de dois números inteiros na forma p/q, ou seja, não existe uma unidade de medida u tal que a medida do comprimento de OP' se possa exprimir por ku, com k inteiro. Por isso se diz que o segmento OP' é incomensurável. A descoberta de segmentos de recta incomensuráveis data provavelmente do século V a.c. e há quem a atribua a **Hipaso de Metaponto**. As circunstâncias em que ocorreu permanecem muito obscuras mas podem estar relacionadas com a aplicação do teorema de Pitágoras ou com a teoria das proporções, já que não existe um número racional b tal que $2/b = b/1$ pois que daqui vem $b^2 = 2$. Há ainda autores que afirmam ter a descoberta dos incomensuráveis a sua origem na relação entre as medidas do lado e da diagonal de um pentágono regular.[1]

Vejamos como demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Com vista a um absurdo, suponhamos que $\sqrt{2}$ é um número racional, isto é que existem dois inteiros a e b primos entre si[2] tais que $\sqrt{2} = a/b$. Nesse caso teríamos $a = b\sqrt{2}$ ou seja $a^2 = 2b^2$ o que quer dizer que a^2 é um número par pois é o dobro de um número inteiro.

Contudo, se a^2 é par também a é par pois o quadrado de qualquer ímpar é ímpar e o quadrado de qualquer par é par. E sendo a um número par, pode escrever-se como o dobro de um outro número inteiro, digamos c. Assim viria $a = 2c$ donde $a^2 = 4c^2$ o que quer dizer que de $a = \sqrt{2}b$ viria $4c^2 = 2b^2$ ou seja $2c^2 = b^2$ o que significa que b^2 e b seriam números pares. só que isto contradiz a hipótese pois se a e b são ambos pares não são primos entre si. Conclui-se assim que $\sqrt{2}$ é um número irracional já que supondo o contrário, somos conduzidos a uma situação impossível.

A descoberta dos números irracionais pelos pitagóricos foi um rude golpe nas suas teorias, principalmente na das proporções, e contrariava o senso comum que parecia indicar que qualquer grandeza se poderia representar por um número racional. Por outro lado as suas implicações na geometria também foram importantes já que deitou por terra muitas das ideias sobre figuras semelhantes. Talvez por tudo isto esta descoberta, que na época foi um verdadeiro escândalo lógico, foi escondida durante largos anos. A demonstração anterior é a tradicional e deve-se a **Aristóteles**. Mais tarde **Teodoro de Cirene** mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ também são irracionais.

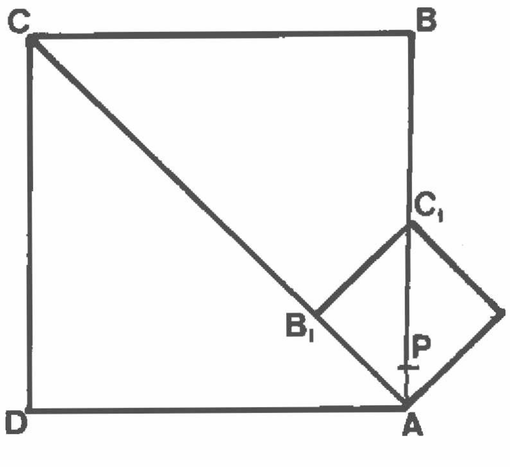


figura 4

Vejamos agora uma outra forma, puramente goemétrica, de provar que a hipotenusa de um trângulo rectângulo de catetos unitários não é comensurável racionalmente com eles, isto é que $\sqrt{2}$ é irracional. Observemos o quadrado ABCD da figura 4. Para chegar a um absurdo suponhamos que existe um segmento AP tal que, tanto os comprimentos da diagonal AC e do lado AB, são múltiplos inteiros do comprimento de AP, isto é que AB e AC são comensuráveis relativamente a AP.[3] Representemos em AC um ponto B_1 tal que $AB = CB_1$ e tracemos B_1C_1 perpendicular a AC. Pode provar-se facilmente que $BC_1 = B_1C_1 = AB_1$, donde AC_1 que é igual $AB - AB_1$ e AB_1 são comensuráveis relativamente a AP e AC_1 e AB_1 são a diagonal e o lado de um quadrado de dimensões inferiores metade das dimensões do quadrado inicial. Repetindo este processo n vezes, chegaremos à conclusão que AC_n e AB_n são comensuráveis relativamente a AP e $AC_n < AP$, o que é absurdo.

Pode ter sido esta a primeira demonstração da irracionalidade do número $\sqrt{2}$, já que os pitagóricos faziam muito uso dos processos geométricos. Seja como for, depois de provada a existência de números irracionais houve que estudá-los e que corrigir todas as anteriores teorias, nomeadamente a teoria da proporcionalidade. Nesse trabalho viria a sobressair **Eudoxo**, cujo trabalho sobre os números irracionais se encontra no quinto livro dos **Elementos de Euclides**.

Hoje em dia os nossos alunos começam a efectuar cálculos com números irracionais no curso geral do ensino secundário sem contudo terem qualquer noção sensível do que são esses números. Ao longo do ensino secundário os alunos trabalham geralmente no conjunto dos números reais, R, mas continuam a não entender bem o que são os números irracionais. Talvez esta introdução histórica seja uma forma de enfrentar esta questão. Permite motivar os alunos, porque é um relato histórico, e tem sobre os alunos o efeito de um choque, porque apresenta factos contrários à intuição. Este choque poderá ser ainda maior quando os alunos se aperceberem de que, no conjunto dos números reais, "são mais" os números irracionais que os racionais. Se se seguir este caminho talvez os nossos alunos, que geralmente detestam efectuar cálculos com números irracionais, passem a gostar mais deles e a conferir maior legitimidade à sua existência e ao cálculo com eles.

NOTAS:

(1) Essa razão é $(\sqrt{5} - 1)/2$.

(2) Exclui-se a hipótese de a ser múltiplo de b pois nesse caso viria a/b inteiro, que é falso pois, como sabemos, não existe nenhum inteiro cujo quadrado é 2. Dois inteiros a e b dizem-se primos entre si se o único inteiro que é simultaneamente divisor de a e de b é 1.

(3) Para simplificar a linguagem usada e a compreensão por parte do leitor cometem-se aqui alguns abusos de linguagem (onde se diz comprimento deveria dizer-se medida do comprimento) e nem sempre se usa a simbologia matemática usada em geometria.

BIBLIOGRAFIA

BOYER, Carl B., *História de la Matematica,* Alianza Editorial, Madrid, 1986.
EVES, Howard, *An Introduction to the History of mathematics*, 5ª edição, Saunders College Publishing, 1983.
STRUIK, J. Dirk, *História Concisa das Matemáticas*, Gradiva, Lisboa, 1989.