SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA NO SECUNDÁRIO

*ANTÓNIO JÚLIO TOUCINHO DA SILVA**

Notas sobre o ensino da matemática no curso complementar.

O ensino da matemática no ensino secundário, particularmente no curso complementar, representa uma enorme responsabilidade para o professor pois é da aprendizagem então conseguida que muito depende toda a posterior formação científica do aluno, não apenas a formação matemática mas também a que respeita a todas as ciências exactas e experimentais. Daí que os 10º, 11º e 12º anos constituem uma óptima oportunidade para enriquecer a formação matemática do aluno através do aprofundamento dos temas estudados e, o que é mais importante, um período em que acima de tudo há que evitar deficiências de aprendizagem através de correctas estratégias de ensino.

Sob o tema proposto, verdadeiramente inesgotável, vou emitir algumas opiniões sobre o que se faz ou o que se deveria fazer quando se ensina matemática nos anos terminais do ensino secundário. Não irei abordar os conteúdos programáticos, nem sequer discuti-los, mas apenas tratar possíveis formas de melhorar ou corrigir, do ponto de vista científico, algumas situações que se verificam com frequência.

* Docente da ESE de Beja

Lógica matemática

Em virtude de hábitos de linguagem próprios da nossa língua o aluno tem uma enorme tendência para confundir equivalência com implicação porque, de uma forma geral, o português diz que isto implica aquilo quando está perante uma equivalência. Isto sucede porque há uma tendência natural para concentrar a atenção na primeira implicação esquecendo assim que o seu consequente também implica o antecedente[1]. É o que acontece quando se diz "se um número é par, é divisível por dois" que se entende como uma implicação - ser par => ser divisível por dois - esquecendo que ser divisível por dois também implica ser número par. Assim, sempre que possível, o professor deverá decompôr as equivalências em duas implicações, apresentando-as de forma explícita aos alunos e uma oportunidade óptima para o fazer surge quando se estuda um teorema. Este deverá ser apresentado como uma implicação - hipótese => tese - e há toda a conveniência em averiguar de imediato se o seu recíproco é, ou não, verdadeiro. Se este trabalho se apoiar nas noções de condição necessária, condição suficiente e condição necessária e suficiente, então estaremos a contribuir decisivamente para o refinamento do raciocínio lógico do aluno e para os importantes frutos que daí ele poderá colher. Vejamos um exemplo do que se acaba de afirmar. Quando se estudam derivadas no 11º ano, estuda-se o teorema "**Se uma função tem derivada finita num ponto, é contínua nesse ponto**", esquematicamente: f tem derivada em a => f é contínua em a. Com isto estamos a afirmar que ter derivada em a é condição suficiente para ser contínua em a e que ser contínua em a é condição necessária para ter derivada em a, ou, em linguagem mais corrente, que "antes de ter derivada num ponto a função necessita ser contínua nesse ponto". Importa em seguida estudar a veracidade ou falsidade do teorema recíproco, ou seja da proposição "se f é contínua num ponto, então tem derivada finita nesse ponto". Como facilmente se pode mostrar por um exemplo - é o caso da função $x \rightarrow |x|$ no ponto zero - há funções que não verificam aquela propriedade, concluindo-se assim que o recíproco do teorema em causa é falso, ou seja que ser contínua em a é necessário mas "não basta" para que a função tenha derivada em a.

Este processo de trabalho levará o aluno a que, dada uma implicação, estude a implicação recíproca. Se esta for verdadeira concluirá que está perante uma equivalência sendo o antecedente, nesse caso, condição necessária e suficiente para que se verifique o consequente, e viceversa. Caso contrário, como acontece em "**se chove então há nuvens**", antecedente e consequente não serão equivalentes, verificar-se o primeiro, no exemplo chover, é suficiente para que se verifique o segundo, haver nuvens, e é necessário verificar-se o segundo para que se verifique o primeiro.

Um outro aspecto da enorme aplicação da implicação como operação lógica encontra-se na chamada lei da conversão, segundo a qual se uma proposição a implica outra proposição b, então a contrária de b implica a contrária de a - no exemplo anterior, se chover implica haver nuvens, não haver nuvens implica não chover. De facto, a partir desta lei, podemos sempre obter uma nova implicação a partir de uma implicação dada, ou obter um novo teorema a partir de um teorema dado.[2] Assim, ao estudar um teorema, será de toda a conveniência que se estude o contra-recíproco pois esta será uma forma de aprofundar o alcance teórico do teorema estudado e de não deixar escapar algumas das suas comsequências importantes. Vejamos um exemplo. Um corolário do Teorema do Valor Intermédio de Bolzano com grande aplicação, diz-nos que "**se uma função contínua muda de sinal num intervalo I, admite pelo menos um zero em I**". O contra-recíproco será "**se uma função contínua não admite zeros num intervalo I, então não muda de sinal em I**" e pode ter uma grande aplicação no estudo de funções, nomeadamente na determinação do seu contradomínio. Como segundo exemplo podemos ver um corolário do Teorema de Rolle - "**entre dois zeros de uma função diferenciável existe pelo menos um zero da sua função derivada**" - donde se poderá concluir também que "**se a derivada de uma função diferenciável não se anula, então a função admite quando muito um único zero**". E mais uma vez estamos perante uma propriedade importante que poderá ter grande aplicação no estudo das funções.

Por outro lado, deve haver um reforço do apelo à actividade mental por parte do aluno por forma a que ele pense antes de calcular, analise e sintetise um problema antes de o resolver. O professor deverá procurar que o aluno crie hábitos de reflexão evitando as questões do tipo "faça ..., calcule ..., determine ..." e colocar-lhe questões como por exemplo "diga justificando se uma função contínua e injectiva em R pode admitir extremos locais".

Estes exemplos aparentemente simples mostram que a lógica matemática estudada no 10º ano poderá desempenhar um importante papel na estruturação do raciocínio do aluno. Para isso será necessário que o professor proceda sempre com os alunos a um estudo lógico das proposições matemáticas estudadas. Desta forma estará a criar hábitos correctos de raciocínio lógico e aprofundar o alcance das inferências estudadas.

Radicais

Um ponto onde se nota uma certa inconsistência no que geralmente os professores de matemática dizem ou fazem na aula diz respeito aos radicais, principalmente às suas propriedades. De facto, depois de aprender no 9º ano que $\sqrt{x^2} = x$, em R^+, no 10º ano o aluno toma conhecimento que, em R, $\sqrt{x^2} = |x|$,(3) mas o hábito adquirido de simplificar o índice da raíz com o expoente do radicando, por exemplo fazendo $\sqrt[3]{x^3} = x$, faz com que os alunos mecanizem esta simplificação sem se aperceberem que ela pode não ser legítima quando se trabalha com números negativos. Por outro lado as curtas e pouco frequentes abordagens que os professores fazem a este facto, e por outro lado as muito frequentes simplificações deste tipo que surgem na resolução de equações, fazem com que, aos olhos dos alunos, $\sqrt{x^2}$ umas vezes seja igual a $|x|$ e quase sempre sempre igual a x, conforme as nossas conveniências do momento!

A causa desta confusão está na frequência com que nas aulas se simplificam raízes quadradas, ou de outro índice par, com os quadrados ou outras potências dos radicandos sem se chamar a atenção dos alunos para o facto de tais simplificações nem sempre serem correctas. Por vezes não o são mas os resultados finais obtidos são exactos, o que mais contribui ainda para a confusão existente. Importa corrigir este procedimento. Para isso dever-se-á recorrer sempre à lei geral $\sqrt{x^2} = |x|$, simplificando o segundo membro, se possível, mas só depois substituir o radical pelo módulo. Por exemplo, apesar de $\sqrt{(a^2 + b^2)} = a^2 + b^2$, dever-se-á sempre fazer $\sqrt{(a^2 + b^2)} = |a^2 + b^2| = a^2 + b^2$.

Esta estratégia insere-se num procedimento mais vasto que tem por objectivo manter sempre presentes as propriedades dos radicais no universo considerado.

Assim o aluno deverá ter sempre presente que algumas propriedades válidas em R^+ podem não o ser em R - por exemplo $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ não tem sentido em R quando a ou b são negativos - e que algumas propriedades têm significado diferente no universo considerado - em C $\sqrt[6]{z^4}$ e $\sqrt[3]{z^2}$ não são equivalentes pois a primeira representa seis números complexos distintos, três dos quais são os representados pelo segundo radical.

Recurso à máquina de calcular e ao computador.

Sem pretender ainda atingir os objectivos relativos ao uso de calculadora e computador previstos nos novos programas de matemática, que certamente exigi- rão a realização de acções de formação específica para os professores, penso que não faz qualquer sentido o professor interditar o uso de calculadora nas aulas de matemática.

Como já ouvi alguém dizer, não querer calculadora nas aulas de hoje é o mesmo que não querer telefone em casa! De facto, se o sistema de ensino pretende educar para o mundo de hoje e de amanhã, não pode recusar ao aluno algo que ele, no seu quotidiano, irá encontrar quando deixar a escola. Pelo contrário, deve preparar o aluno para o correcto uso de todos os instrumentos de trabalho que ele irá encontrar ao longo da sua vida.

De imediato, e sem falar das largas aplicações que a calculadora pode ter na educação matemática do aluno, que aliás estão tratadas em publicações da responsabilidade da Associação dos Professores de Matemática e da Sociedade Portuguesa de Matemática, a caluladora pode esclarecer muitas dúvidas que os alunos frequentemente apresentam, nomeadamente na comparação de números fraccionários ou irracionais. Todos os professores tiveram já nas suas turmas alunos com enorme dificuldade em colocar por ordem crescente, ou decrescente, os números, $(2-\sqrt{6})/3$,

$(-3+\sqrt{2})/4, -1/3$ e -11/40. O recurso à máquina de calcular permite aos alunos ultrapassar rapidamente esta dificuldade, com a vantagem de os habituar a representar números através de uma dízima e, por outro lado, a visualização destas dízimas pode desempenhar um papel importante no desenvolvimento do cálculo mental com números decimais.

Relativamente ao computador, o seu uso na aula ainda está pouco difundido.

Contudo, há escolas onde tal é possível e há muitos alunos que dispõem de um em casa e que anseiam poder usá-lo com fins didácticos. Deste modo o professor, quando habilitado para tal, poderá orientar os seus alunos para o uso do computador através de pequenos programas que eles próprios poderão escrever.(4) Este tipo de trabalho poderá ser muito útil em casos de grande repetição de cálculos, como no estudo da associatividade de uma operação defida numa estrutura algébrica, no cálculo do limite de uma sucessão ou de uma função, e no cálculo de valores aproximados de um número. Em todo o caso há que alertar os alunos para os erros de arredondamento e sua propagação, para o que, no cálculo de termos de uma sucessão, não se deverá ir além da ordem 100000, por exemplo, sob pena dos resultados obtidos não terem significado. Quanto aos valores aproximados, no 12º ano poder-se-á dar aos alunos a fórmula de MacLaurin para algumas funções mais frequentes,[5] por exemplo sen x, arctg x e e^x, para que através delas os alunos possam por exemplo calcular valores aproximados de Π e de e, ou mesmo construir uma tábua de senos para ângulos entre 0^o e 90^o. Eis dois exemplos muito simples: o primeiro, em Basic facilmente convertível, calcula os 1000 primeiros termos da sucessão de termo geral $(1+1/n)^n$ e o segundo, em Pascal, calcula um valor aproximado de Π através da fórmula de **MacLaurin**

```
calculo de valor aprox. de e For
n% = 1 to 1000 Print (1 + 1/n%) ^ n%
next n%
```

```
Program calc_Pi (input,output)
var
   t,a: longreal;
   n: integer;
begin
   t: = 0;
   n: = 0;
   While n00
      begin
        a: = 1/(2*n + 1);
        n: = n + 1;
        if n mod 2 = 0 then
             t: = t + a
        else
             t: = t-a
        end ;
   write ( valor aproximado de Pi ,
   4*t ); end.
```

Resolução gráfica de equações e cálculo do contradomínio de funções.

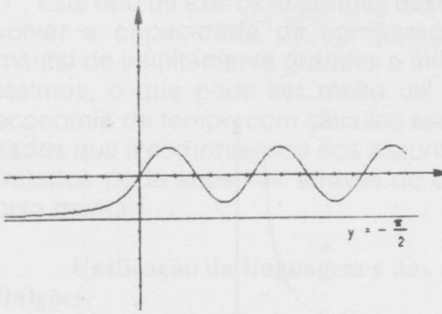
Ao longo dos 10º, 11º e 12º anos os alunos estudam muitas funções elementares (algébricas e transcendentes), suas propriedades e a sua tradução ao nível gráfico (injectividade, paridade, etc). Contudo, a verificação gráfica do estudo analítico de funções fica-se muitas vezes por aí, não sendo aplicada posteriormente ao estudo de outras funções nem à resolução de equações ou inequações

Contudo, pode ser muito proveitoso para o aluno saber esboçar rapidamente o gráfico de uma função. De facto, muitas equações e inequações podem ser rapidamente resolvidas recorrendo ao gráfico das funções estudadas e o caso mais elementar é o das inequações do tipo f(x) >0, sendo f(x) um polinómio do segundo grau.

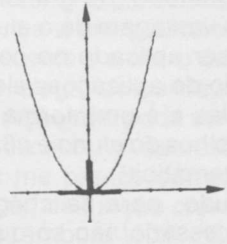
Também muitas vezes o estudo de uma função fica significativamente simplificado recorrendo às representações gráficas conhecidas. É o caso de se querer determinar o contradomínio [6] da função g:R→ R definida por

$$X \rightarrow g(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{se } x \geq 0 \\ \text{arctg } x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

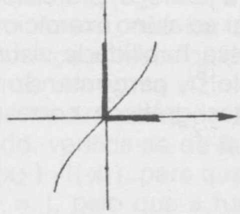
para o que bastará construir o gráfico seguinte e concluir que g (R) =]-II 2.1]



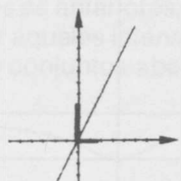
Ainda sobre a determinação do contradomínio de funções, a representação gráfica pode ser particularmente útil se se vocacionar o aluno para a decomposição de funções não elementares em funções componentes elementares. Contudo, e para evitar algumas incorrecções que frequentemente se encontram mesmo em livros de texto de autores consagrados(7), dever-se-á transmitir aos alunos o teorema segundo o qual a imagem de um intervalo por uma função contínua é ainda um intervalo. Assim, aplicando este teorema, o aluno pode verificar se aquelas funções componentes são contínuas e, caso afirmativo, proceder como no exemplo seguinte. Dada a função h definida por -II/2 + 2arcsenx^2, o contradomínio pode calcular-se fazendo D h = {x∈ R:-1 ≤ x^2 ≤1 } = [-1,1] x x2 arcsenx2 2arcsenx2 2arcsenx2, e recorrendo aos gráficos.



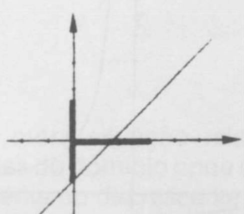
$f_1: [-1,1] \longrightarrow [0,1]$
$x \mapsto x^2$



$f_2: [0,1] \longrightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$x \mapsto \text{arcsen } x$



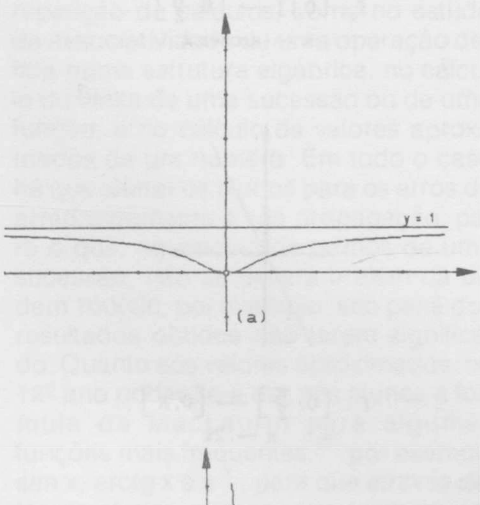
$f_3: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [0, \pi]$
$x \mapsto 2x$



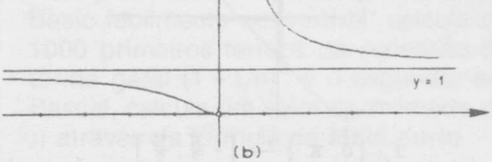
$f_4: [0, \pi] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$x \mapsto -\frac{\pi}{2} + x$

Este método, de grande simplicidade, tem a vantagem de o aluno ver o domínio a ser aplicado no contradomínio por meio de aplicações elementares já conhecidas e é uma forma de tornar visível, aos olhos do aluno e nßão só, a beleza da matemática!

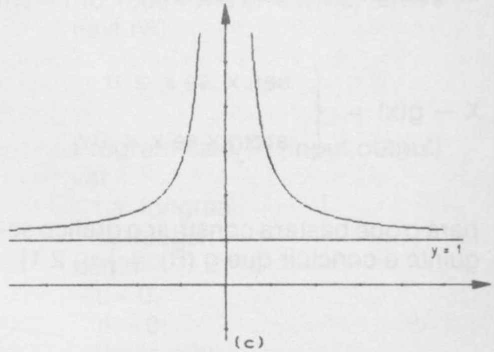
Contudo, para se chegar a este ponto é necessário não só que o aluno conheça o gráfico das funções elementares estudadas, mas também que desenvolva uma certa destreza visual que, aos poucos, lhe irá permitir resolver exercícios cada vez mais diversos de forma gráfica. Para tanto o professor deverá proporcionar ao aluno exercícios em que ele treine essa habilidade visual, como por exemplo(8) perguntando-lhe qual dos seguintes gráficos corresponde à função $x \rightarrow e^{1/x}$



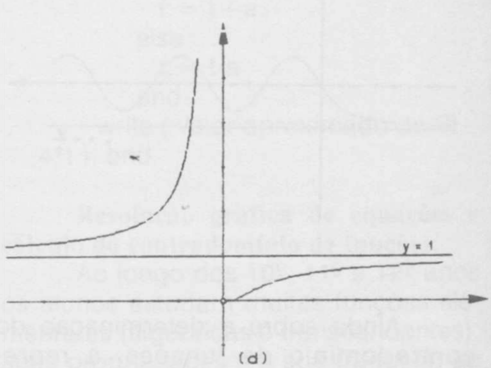
(a)



(b)



(c)



(d)

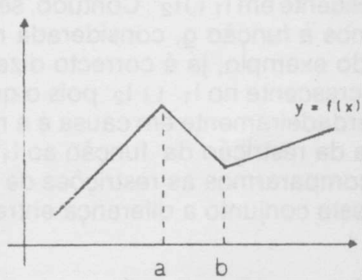
Este tipo de exercícios permite treinar o aluno na construção mental do gráfico de uma função apelando e, o que é muito importante, desenvolvendo também todas as suas capacidades de cálculo mental.

Comparação de infinitésimos e de infinitamente grandes.

Não podemos deixar de fazer uma referência muito rápida a este respeito porque a comparação da ordem de infinitésimos e de infinitamente grandes permite ao aluno, por um lado compreender melhor a noção de limite e, por outro lado desenvolver a sua capacidade de cálculo mental, nomeadamente no que respeita ao cálculo de limites. Assim, o professor deverá proporcionar ao aluno exercícios onde ele possa praticar esta comparação aproveitando, primeiro o estudo das sucessões e depois o das funções. A forma mais fácil de o fazer consiste em associar a ordem de um infinitamente grande à noção intuitiva de rapidez com que ele tende para $+\infty$, e seguidamente procurar que o aluno ordene, por exemplo por ordem crescente de rapidez com que tendem para $+\infty$, os infinitamente grandes de termos gerais $2n$, $\sqrt{10n}$, 2^n, e^n, $n!$, $\log n$, $\sqrt{n}$, n^3, n^n. Este tipo de exercício permite desenvolver a capacidade de comparação mental de infinitamente grandes e infinitésimos, o que pode ser muito útil na economia de tempo com cálculos escusados que a compreensão dos assuntos tratados pode substituir através do cálculo mental.

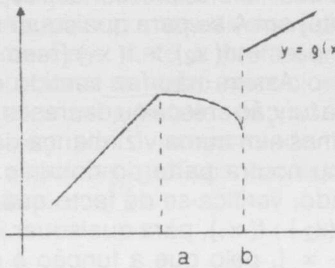
Unificação da linguagem e das definições.

Em matemática existem muitas questões de linguagem sujeitas a convenções que, de forma geral, não são nem unânime nem pacificamente aceites. Das muitas que aqui se poderiam tratar, vamos apenas abordar a que respeita aos intervalos de monotonia de uma função e à forma como esses intervalos poderão ser apresentados. Comecemos por considerar a função $f:x \rightarrow x^2$. Muitos professores dizem que esta função é crescente no $]0, +\infty[$ e decrescente no $]-\infty, 0[$, mas outros apresentam aqueles intervalos fechados. Em primeiro lugar, o aluno deverá ser alertado para o facto de esta questão estar sujeita a convenções, pelo que uns autores poderão tratá-la de uma maneira e outros de outra. Contudo, o professor está obrigado, pela própria disciplina que ensina, a um rigor lógico segundo o qual as convenções a utilizar têm de estar de acordo com as definições adoptadas, mesmo que a nossa intuição nos tente a fazer o contrário. Todos aqueles que, no caso anterior, apresentam os intervalos abertos, fazem-no para evitar que o ponto 0 pertença a um intervalo onde a função é crescente e a outro onde ela é decrescente, alegando por vezes que "num ponto a função não pode ser simultaneamente crescente e decrescente". Esta ideia não me parece correcta uma vez que a noção de função crescente ou decrescente, embora local, não é uma noção pontual, pois as definições adoptadas são sempre equivalentes a " seja $f:D \rightarrow R$ uma função e $A \subset D$ uma parte do seu domínio, f diz-se crescente [resp. decrescente] em A se para quaisquer $x_1, x_2 \in A$, $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ [resp. $f(x_1) < f(x_2)$]". Assim, não faz sentido dizer que uma função cresce ou decresce num ponto, mas sim numa vizinhança de um ponto ou noutra parte do domínio. Por outro lado, verifica-se de facto que, $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, para quaisquer x_1, x_2 do $[0, +\infty[$, pelo que a função é crescente naquele intervalo. Analogamente se mostraria que f verifica a definição de função decrescente no $]-\infty, 0]$. Conclui-se assim que adoptando definições equivalentes às anteriores, não faz sentido escrever aqueles intervalos de monotonia como conjuntos abertos[9].

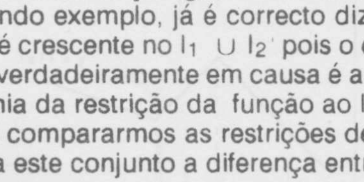


Uma outra situação relacionada com as partes do domínio onde uma função é crescente ou decrescente é a que surge quando a função tem o mesmo tipo de monotonia em dois intervalos disjuntos do seu domínio. Um exemplo é o da função f apresentado na figura seguinte.

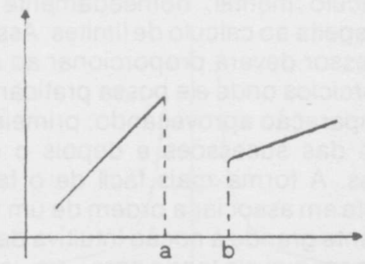
Sejam I_1 um intervalo de extremo superior a onde f é crescente e I_2 um intervalo de extremo inferior b onde f também é crescente. A questão que geralmente aqui surge consiste na forma de indicar onde f é crescente: se "f é crescente em I_1 e em I_2" se "f é crescente em $I_1 \cup I_2$ Esta última forma é muito frequentemente utilizada mas não com o cuidado necessário.



De facto, a função f considerada no exemplo não verifica no conjunto $I_1 \cup I_2$ a definição de função crescente anteriormente considerada pois existem x_1 e x_2 em $I_1 \cup I_2$ tais que $x_2 \rangle x_1$ e $f(x_2) \leq f(x_1)$. Assim, não é correcto dizer que "f é crescente em $I_1 \cup I_2$". Contudo, se atendermos à função g, considerada no segundo exemplo, já é correcto dizer que "g é crescente no $I_1 \cup I_2$" pois o que está verdadeiramente em causa é a monotonia da restrição da função ao $I_1 \cup I_2$. Se compararmos as restrições de f e de g a este conjunto a diferença entre os



Restrição de f a I ∪ J



Restrição de g a I ∪ J

dois casos torna-se mais visível e conclui-se inequivocamente que, no caso da função f, deveríamos dizer que f cresce em I_1 e em I_2 em vez de em $I_1 \cup I_2$, enquanto que relativamente à função qualquer das formas é correcta.

Podemos agora sintetisar o que procurámos esclarecer com a seguinte definição: sendo I e J dois intervalos disjuntos do domínio de uma função Ψ, onde esta tem o mesmo tipo de monotonia, diz-se Ψ é crescente em $I \cup J$ se a restrição de Ψ ao $I \cup J$ é crescente. De forma análoga se definirá função decrescente em $I \cup J$.

NOTAS:

1 - Numa implicação em que uma afirmação p implica outra afirmação q, $p \Rightarrow q$, p diz-se o antecedente e q o consequente.

2- Esse teorema é o chamado contra-recíproco do teorema dado.

3- $\sqrt{x^2} = x$ se e só se $x \geq 0$; caso contrário $\sqrt{x^2} = -x$.

4- O livro de texto "M12" (ver bibliografia) apresenta alguns exemplos desses programas.

5- O livro de texto do Prof. César de Freitas para o 12º ano apresenta a fórmula de Maclaurin para a função exponencial e sugere-a como forma de os alunos calcularem, de forma aproximada, algumas potências de e.

6- Os professores devem insistir mais na determinação do contradomínio de funções pois ela permite levar o estudo das funções até às últimas consequências.

7- Neste caso concreto, a incorrecção de que estamos a falar consiste em fazer -II /2 arcsenx2 donde 2arc-senx2, etc.

Este procedimento está incorrecto porque parte do princípio de que a função arco-seno toma sempre todos os valores do o que neste caso não acontece!

8- Este exercício foi retirado da prova específica de acesso ao IST, 1989, 1ª chamada.

9- Este facto torna-se ainda mais evidente se pensarmos que uma função contínua transforma conjuntos compactos em conjuntos compactos. Por exemplo a função cosx aplica o [- ,0] n0 [-1,1],é contínua e injectiva no [- ,0] e é nitidamente crescente neste intervalo.

BIBLIOGRAFIA:

APOSTOL, Tom A. - *Cálculo* - vol. I, Editora Reverté, Lda, Barcelona, 1988.

FERREIRA, J. Campos - *Introdução Análise Matemática* - 3ª edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1990.

FREITAS, A. César e outros - *Matemática 12º ano de escolaridade* - vol. I e II,3ªedição, Livraria Popular Francisco Franco, Lda, Lisboa, 1983.

GUERREIRO, J. Santos - *Curso de Matemáticas Gerais* - Livraria Escolar Editora, Lisboa,1970.

LIMA, Elon Lages - *Curso de Análise* - vol. I, Projecto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1982.

MACHADO, Armando e outros - *M12, Matemática 12º ano* - Texto Editora, Lisboa,1985.

NEVES, Maria Augusta e outros - *12º Matemática*, Livro de texto - Porto Editora,Porto, 1985.

SILVA, J. Sebastião e - *Compêndio de Matemática* - GEP, Lisboa, 1978.