

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MATEMÁTICA

MARIA ALCINA DE CAMPOS DE SOUSA FARIA*

Como é que a matemática, que é, antes de tudo, um produto do pensamento humano, independente da experiência, pode adaptar-se tão admiravelmente aos objectos da realidade ?

Albert Einstein (1979-1955)

... uma compreensão da matemática pode auxiliar-nos de modo inestimável nas nossas tentativas multidisciplinares para compreender a natureza e a existência humanas.

Michael Guillen

Pontes para o Infinito (1993), Gradiva

1. INTRODUÇÃO

Caracterizada por crescentes e profundas alterações, onde constantemente surgem situações complexas que é necessário resolver, a sociedade actual tem necessidade de indivíduos com grande capacidade de adaptação, capazes de formular problemas decorrentes de situações com que se deparam e de os resolver habilmente. Isto é, de indivíduos que pensem de uma forma flexível, crítica e criativa.

Situações de ensino que estimulem a investigação, a cooperação e a comunicação favorecem tanto a *formulação* como a *resolução de problemas*.

A aula de matemática deveria ser um dos locais privilegiados para preparar o Homem que a sociedade

* Docente na ESE de Leiria

hoje reclama. No entanto, o ensino da matemática nos últimos anos tem sido orientado para preparar alunos com alguma capacidade de cálculo, mas incapazes de resolver problemas. Este facto não é de estranhar, uma vez que o ensino da matemática se tem centrado na aprendizagem de conteúdos. Os alunos são solicitados a memorizar informação e regras para utilizar mecanicamente, não se evidenciando uma preocupação no desenvolvimento de capacidades fundamentais à resolução de problemas.

Os investigadores em Educação defendem a ideia de que para se conseguir um *bom resolvidor* de problemas é necessário promover actividades que envolvam o recurso sistemático às capacidades básicas do pensamento, uma vez que é durante essa resolução que o aluno tem possibilidade de as adquirir e desenvolver.

O perfil do professor (a) de matemática ou a dinâmica do ensino da matemática em situação de sala de aula não são preocupações exclusivas da época em que vivemos se reflectirmos sobre as palavras de Polya (1975,44):

Um professor de Matemática tem uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar os seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade.

Mas se desafiar a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá inculcar-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes meios para alcançar esse objectivo.

A tarefa do docente parece estar em este possuir a capacidade focar a atenção dos seus alunos para questões que eles possam encontrar solução. O facto dos problemas colocados terem em consideração os pré-requisitos dos aprendizes possibilitará uma motivação constante e um avanço dos conhecimentos. Por outro lado, o interesse será uma realidade e o desenvolvimento dos intelectos destes jovens manifestar-se-á. No final todos estarão satisfeitos, professor e alunos constituíram uma boa equipa.

O processo de aprendizagem irá exigir que analisem a situação à luz dos conhecimentos que possuem, concebam técnicas matemáticas apropriadas e, subsequentemente, apliquem essas técnicas para resolverem o problema.

No domínio da matemática, **pensar, raciocinar e resolver problemas** são capacidades/objectivos/actividades constantes de quem abraça esta ciência. Não podemos subestimar a importância de resolução de problemas em toda a educação. Para satisfazer este objectivo o curriculum de matemática deve proporcionar a todos os alunos muitas oportu-

tunidades para enfrentar problemas que os interessem e desafiem e que, com o esforço apropriado consigam resolver.

O presente trabalho tem como principal preocupação reflectir sobre as abordagens teóricas da resolução de problemas e enquadrá-las, de um modo muito particular, no caso específico da **resolução de problemas em matemática**. Pretendeu-se conhecer as diversas etapas e os processos envolvidos na resolução de um problema. Como é que um professor pode levar um aluno a raciocinar? Qual a melhor forma de criar uma situação de ensino que estimule a investigação, a cooperação e a comunicação? Este trabalho tem como ponto de partida estas questões pertinentes (nem sempre conscientes) que se colocam no dia a dia do professor de matemática.

2. HORIZONTES DA COMPREENSÃO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Pensar é actividade privilegiada dos seres humanos. Pensar sobre o pensar de um modo científico é só tarefa de alguns. Numa das áreas mais interessantes do estudo experimental do pensamento está circunscrita a resolução de problemas. A preocupação científica desta temática remonta à época histórica dos primeiros psicólogos quando estes se debatiam para

eleva a psicologia ao estatuto de ciência. Assim, destacam-se num primeiro momento:

- ESCOLA DE WURZBURG
- GESTALTTHEORIE

Os investigadores da escola de Wurzburg defenderam a existência de *um pensamento sem imagens*, isto é, o pensamento é autónomo relativamente às imagens. Esta afirmação estabelece uma ruptura com o conhecimento anterior de uma psicologia clássica e associacionista que considera o pensamento o produto mais elevado de um conjunto de ligações/associações de elementos psíquicos; pelo que, os conceitos seriam o resultado da associação de duas ou mais imagens. Assim, a construção de ideias abstractas gerais (conceitos) encontram-se na dependência das leis da semelhança e contiguidade que determinam de um modo mecânico a esquematização das imagens.

A metodologia utilizada pela escola, a introspecção (método de Watt) que consistia numa auto-avaliação do sujeito ou evocação dirigida por uma ordem ou instrução traz também o seu contributo ao estudo do pensamento. Segundo Watt (Pradines, 1986) o conceito é determinado pelas imagens e o seu elemento essencial é *le sens* que a imagem ou a palavra pode evocar ou representar, tendo em consideração que quer uma quer outra são pré-existentes. Buhler e Ach

traduzem *le sens* por **intenções** (tensão para) mostrando a autonomia desta determinação em relação à imagem : perspectiva as imagens que se revelam incapazes para acolher ideias, isto é, são inadequadas para resolver um problema ou estabelecer uma relação causal.

Apesar de terem contribuído para o avanço da psicologia os estudiosos desta escola não conseguiram ultrapassar o seu carácter mecanicista, nem a passividade dos processos mentais, pelo que enquadram o pensamento e as suas actividades numa lógica pura.

Se a escola de Wurzburg apreendeu as funções próprias do pensamento os gestaltistas evidenciaram o pensamento como resolução de problemas. O modo como a actividade de pensar se revela na construção de soluções vai ser abordada na faceta da razão enquanto técnica construtora de meios. Assim, a descoberta das causas possibilita uma técnica eficaz para a invenção de meios necessários para alcançar fins definidos.

Para a Gestaltheorie a actividade do pensamento é um duplicado da percepção por isso apresenta como contributo para a ciência psicológica os seguintes conceitos (Pinho; 1991):

Gestalt (forma ou configuração): sistema de relações dinâmicas entre os elementos de um conjunto onde as propriedades das formas constituem um valor acrescentado aos seus com-

ponentes e estão dependentes de leis de organização preceptiva. A forma destaca-se de um fundo e existe a possibilidade de alternância entre a forma ou figura-fundo (reversibilidade dinâmica figura-fundo).

Insight (intuição): compreensão súbita de relações causais, descoberta de relações necessárias pelo que está suposto um universalização ou capacidade de discernimento relativamente a casos particulares. Este conceito surge a partir das experiências de Kohler.

Compreensão: definida por Wertheimer com o desenvolvimento de uma linha de pensamento a partir de lacunas, na situação das dificuldades estruturais e do desejo de as resolver, acertar o que está errado e atingir a corrente de relação íntima.

Pensamento produtivo (invenção): para Duncker o progresso do pensamento comporta sempre as mesmas etapas: a consciência, a delimitação do conflito e a sua causa, a determinação funcional da solução e a realização prática. Assim, segundo o autor destaca-se:

- as soluções propostas não são tentativas do acaso;
- cada proposta serve para reformular o problema;
- a eficácia das propostas concretas depende do seu valor funci-

onal indispensável à sua avaliação como solução;

- as soluções são transferíveis na medida em que se apreendem os seus valores funcionais.

Embora não haja uma contribuição tão importante para a resolução de problemas como a do cognitivismo a teoria Piagetiana e a Gestaltheorie deram alguns contributos apreciáveis.

Na teoria Piagetiana está-se perante a resolução de um problema quando nos apercebemos que um indivíduo é capaz de pensar sem a presença de um suporte concreto e em termos de hipóteses alternativas (a contrária, a inversa e a recíproca da inversa). Embora ainda não tenha havido um contributo fundamental dado por esta teoria encontram-se nela elementos importantes para a resolução de problemas.

Mas é com Newell e Simon que a resolução de problemas é encarada na perspectiva de processamento de informação (o homem é considerado um operador humano e é comparado a um computador). Pela primeira vez surgem conceitos como a recepção de informação, elaboração de informação, fluxo de entrada e fluxo de saída. Foi o cognitivismo que deu um contributo notável ao modelo de resolução de problemas. Existem dois aspectos que são considerados básicos para uma adequada teoria de resolução de problemas:

1. Deve caracterizar-se por uma descrição completa da arquitectura e das capacidades de processamento de informação;
2. Os processos são descritos passo a passo (set by set).

Deste modo, segundo Raposo (1994), o modelo geral de resolução de problemas apresenta as seguintes etapas:

1. Um problema consiste numa situação em que se pretende algo e se desconhecem os passos precisos para o alcançar;
2. o operador humano analisa o problema em objectivos e dados e guarda a representação inicial dos objectivos e dados, na memória
3. o operador humano opera sobre a representação dos dados e objectivos com vista a reduzir a discrepância entre os dados e objectivos. Uma solução para o problema consiste na via de operações que podem transformar os dados em objectivos;
4. Vias de acesso a que pode recorrer o operador humano:
 - Informação na memória a longo termo,
 - Heurísticas,

- Algoritmos,
 - Relações metafóricas com outras representações;
5. pesquisa - processo de operar sobre uma representação inicial para encontrar uma solução para o problema;
 6. a pesquisa continua até que seja encontrada a solução ou que o operador desista.

Sob a influência de Newell e Simon, a investigação em educação em geral, e a investigação em resolução de problemas em particular, passou a ter características diferentes.

3. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MATEMÁTICA

O problema consiste numa situação na qual o indivíduo pretende fazer alguma coisa mas não sabe a sequência de acções que são necessárias para atingir o que se pretende (Newell e Simon, 1972). A resolução de problemas inicia-se com uma questão e prolonga-se com um exercício ou actividade.

Segundo Gil (1984) um problema é produto de uma dificuldade que requer uma solução. A procura das respostas implica uma escolha de alternativas a seguir. É uma actividade

de selectiva e a procura de soluções nem sempre se pode fazer utilizando *uma busca forçada do resultado*.

3.1. ETAPAS E PROCESSOS IMPLICADOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Existem várias etapas que remetem para uma caracterização geral da resolução de problemas:

1. Estado inicial de formulação ou posição do problema.
2. **Estados intermédios de procura da resposta** (que será a resolução propriamente dita).
3. Estado final da resolução ou da determinação dos resultados.

Para que se possa resolver adequadamente um problema é necessário que a **interpretação** do mesmo seja adequada. Segundo Gil a interpretação de um enigma decorre de um jogo de analogias cujas leis são obscuras para o próprio intérprete; a dificuldade em compreender é inerente ao enigma ... afigurando-se irrealizável determinar quais e quantas as boas interpretações. (1984, 248).

Um problema para ser considerado como tal é necessário que coloque situações de pesquisa e reflexão, pois se tudo fosse completamente definido não seria um problema. Por outro lado, encontra-se bem colocado

quando o resolvidor consegue fazer uma representação suficientemente adequada das várias etapas da sua resolução.

Perante um problema bem definido, o sujeito possui uma visão clara da situação inicial, da meta a atingir e dos operadores necessários para passar da formulação à solução. Deste modo, ao equacionar o problema o sujeito possui as informações necessárias à sua resolução e o conhecimento da situação final, permite-lhe decidir sobre a validade das respostas produzidas.

A interpretação da linguagem reporta-se à compreensão das proposições que constituem um enunciado do problema. É de salientar que existe *uma alternância frequente entre ambas (compreensão e resolução)*. *As dificuldades encontradas na resolução levam a reexames do enunciado do problema afim de testar a representação que dele se fez e procurar complementos de informação. Inversamente o sujeito reorientará a posição do problema em função dos resultados parciais tornando-se assim mais manipulado.* (Gil, 1984, 257).

Ashcraft (1989) considera que o pensamento se exerce em qualquer tipo de tarefa, todavia **para agir não é necessário compreender**. Quando isto acontece estão envolvidos os mecanismos da memória (evocação e fixação) que permitem estabelecer relações entre as coisas, criando uma acção adequada ao momento. Na pers-

pectiva de Thom, *As situações em que se age sem compreender são aquelas em que se possui de alguma forma essa eficácia que funciona sem compreender exactamente como é que funciona - e porque é que funciona.* (1987, 16). Estas situações são frequentes nos aprendizes de matemática, muitas vezes os alunos não sabem interpretar os problemas ou agem de uma forma mecanicista sem compreender os processos envolvidos em tal resolução.

3.2. TIPOS DE PROBLEMAS

Greeno (1978) considera três tipos puros de problemas:

1. INDUÇÃO DA ESTRUTURA (*Inducing structure*).
2. TRANSFORMAÇÃO (*Transformation*).
3. ARRANJO (*Arrangement*).

No tipo *indução da estrutura*, o sujeito procura identificar a regra ou padrão subjacente a um conjunto de elementos que é apresentado pelo experimentador. Exemplos deste tipo são os problemas de :

- ANALOGIA (A está para B como C está para ?).
- CONTINUAÇÃO DE SÉRIE (2,4,6,8, ?).

Para chegar à solução deste tipo de problemas é necessário que o resolvidor aprenda a relação entre os elementos e construa uma regra.

Os problemas de *transformação* requerem transformações sucessivas de uma situação inicial de modo a alcançar-se o resultado pretendido. Neste tipo de problema o resolvidor tem como tarefa principal encontrar sequências correctas de operações que permitam passar da situação inicial ao resultado final. Como exemplo deste tipo de problemas podemos salientar a *Torre de Hanói* (consiste na transferência de uma torre, constituída por três ou mais argolas da primeira estaca para a terceira mediante as seguintes condições: mover apenas uma argola de cada vez e nunca colocar uma argola maior por cima de uma de tamanho inferior) e o problema do *Lobo a Cabra e a Couve*. No outro exemplo situam-se as demonstrações de problemas (a partir de uma ou mais proposições derivar outras segundo determinadas regras de inferência).

Nos problemas dos arranjos os resolvidores devem possuir dados fornecidos segundo um determinado critério. São problemas deste tipo:

- **anagramas** (ordenação de um conjunto de letras de modo a constituir uma palavra),
- **cripto-aritméticos** (atribuição de algarismos a letras agrupadas

em palavras de tal maneira que a soma seja correcta).

Neste tipo de problemas, os sujeitos procuram a solução correcta através do método de ensaios e erros. No caso dos *anagramas* estabelecem-se todas as combinações possíveis das letras apresentadas e com a ajuda do dicionário escolhe-se a palavra correcta. Nos problemas *cripto-aritméticos* o sujeito depois de várias tentativas restringe o leque de possibilidades a admitir até encontrar a solução correcta.

No entanto, a grande parte dos problemas não se enquadram num dos tipos apresentado-se como uma hibridação dos tipos puros. Podemos deste modo apresentar alguns exemplos do tipo híbrido de problemas:

1. Problemas de estrutura e transformação.
2. Problemas de transformação e arranjos.
3. Problemas de indução da estrutura em arranjos.

Os problemas considerados como sendo de transformação apenas o são de uma forma ideal. De facto, tais problemas exigem a compreensão da sua estrutura. A utilização de uma estratégia (análise meios/fins) supõe a compreensão da situação inicial (construção do espaço problema a partir do

seu enunciado); das acções a realizar e da solução. Podemos inferir que os problemas de transformação que foram atrás apresentados são também problemas de estrutura.

O jogo de xadrez traduz um problema do tipo de transformação de arranjos. Os sujeitos, na situação inicial do jogo, deparam-se com um arranjo ou disposição das peças no tabuleiro e se moverem adequadamente as peças a partir do estádio inicial poderão vencer o jogo. Outro exemplo deste tipo de problemas são as reparações de avarias em máquinas electrónicas, os processos de resolução vão envolver a elaboração de um plano (análise meios/fins) e a pesquisa de soluções (pesquisa construtiva).

Dos problemas de indução da estrutura em arranjos Greeno (1978) inclui os problemas ditos de:

- *insight*
- *design* e invenção
- composição

Como exemplo de problemas do *insight* temos o problema da vela de Dunker (consiste na construção de um suporte para uma vela utilizando os seguintes objectos: uma vela, uma carteira de fósforos e uma caixa de cartão contendo tachas). Para resolver este problema está subjacente a utilização de um objecto apresentado que à partida não se supõe que se venha a utilizar (neste caso a caixa).

O problema do *design* e *invenção* implica a procura de um material próprio para colocar em telhados com a particularidade de reflectir o calor quando a temperatura é elevada e absorvê-lo quando a temperatura é baixa. Ao tomarem conhecimento da existência de uma espécie de peixe (patrúcia- peixe que muda de cor com mecanismos de contracção e relaxação) os sujeitos por analogia encontrarão a solução para o problema. No *design* e invenção (...) o novo é iluminado pelo antigo, o problema dá a si próprio, em princípio os meios da sua solução. (Gil, 1984, 265).

Finalmente, podemos considerar os problemas de **composição** nos quais englobamos a criação artística e a investigação científica. São de todos eles os mais exigentes do ponto de vista intelectual, uma vez que requerem conceitos abstractos.

Este tipo de actividades do pensamento constituem formas superiores da invenção e envolvem uma condensação de significação que um trabalho ulterior poderá explicitar. (Gil, 1984).

Mais tarde Greeno e Simon (1988) consideram os problemas cuja tarefa que é pedida aos sujeitos consiste em avaliar/ajuizar o valor lógico formal de silogismos. Este tipo de problemas considera-se pertencente mais a tarefas de raciocínio e não tanto à resolução de problemas.

3.3. MÉTODOS DE INVESTIGAÇÃO

Como o método de investigação da resolução de problemas Cohen (1988) salienta as dificuldades inerentes ao uso de medidas como :

VELOCIDADE (tempo gasto para solucionar o problema).

EXACTIDÃO (número de erros cometidos).

Com este tipo de análise escapa frequentemente ao investigador outro tipo de medidas como seja o grau de dificuldade encontrado pelo sujeito na realização da tarefa. As limitações impostas por estas variáveis levou que estas fossem consideradas pertinentes para o estudo dos processos de pensamento. Assim, a resolução de problemas adoptou como métodos de investigação:

1. As análises das verbalizações do sujeito.
2. O registo dos seus movimentos oculares.

Segundo Ericsson & Simon (1985) as observações feitas com base nas verbalizações dos sujeitos enquanto resolvem problemas, pode incluir comportamentos não verbais. No entanto, segundo Caverni (1988) consideram-se os seguintes tipos de verbalização:

- a) As verbalizações no interior da execução (expressões de dúvida, expressões de hipótese ou de in-

terrogação, expressões de dificuldade de memória, expressões de uma dedução a propósito de uma propriedade).

- b) A verbalização do procedimento (o sujeito exprime a maneira como procede).
- c) As verbalizações externas com base no procedimento (avaliação e justificações).
- d) As verbalizações externas do procedimento (redefinição de tarefas, estado geral do sujeito).

Nas verbalizações é de salientar a importância da memória a curto prazo uma vez que ela funciona como um armazém temporário de informação. Constitui assim, uma memória do tipo executivo sendo no entanto de amplitude limitada, pois não há retenção na memória de uma sequência ilimitada de algarismos.

Quanto ao registo dos movimentos oculares Lévy-Schoen (1988) considera que existem desfasamentos de dois tipos .

TEMPORAIS (por um lado quando um olhar se desloca de um elemento de um campo para o outro, apesar de o olhar se fixar neste último pode ainda continuar a tratar o elemento anteriormente considerado).

ESPACIAIS (em qualquer indivíduo o olhar não trata apenas aquilo que está á sua frente mas também

engloba todo campo de visão e as suas vizinhanças).

Através da análise de movimentos oculares permite-nos obter dados sobre o decurso da apreensão da informação.

Todos estes métodos de investigação têm como objectivo principal detectar quais os mecanismos e quais as sequências de mecanismos do pensamento. A resolução de problemas supõe deste modo apreender o pensamento nos passos que antecedem a solução do problema.

4. A PRÁTICA PEDAGÓGICA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

4.1. ORGANIZAÇÃO DAS ACTIVIDADES

A resolução de problemas em matemática no sentido mais alargado é aproximadamente sinónimo de *fazer matemática*. Durante os últimos anos vários investigadores em educação têm procurado dar resposta à seguinte questão: *Será possível ensinar a resolver problemas?* Ao procurar uma estratégia adequada para ensinar a resolver problemas, os investigadores basearam-se na observação de peritos em resolução de problemas a quem pediam que *pensassem em voz alta* perante, durante e em determinada situação problemática. Com base em alguns resultados da experiência foram-se elaborando alguns modelos. Utili-

zando processos como entrevistas, observações dos comportamentos dos resolvidores, análises detalhadas de protocolos escritos e orais, a investigação de Kantowski (1975) é considerada um ponto de viragem na investigação em resolução de problemas em matemática. O foco nos produtos resultantes da actividade de resolver problemas foi substituído pelo foco nos processos gerados e utilizados pelos estudantes.

Schoenfeld (1985) referiu-se a quatro tipos diferentes de conhecimentos envolvidos na resolução de problemas:

1. **RECURSOS** (conhecimentos de matemática e de algoritmos).
2. **HEURÍSTICAS** (estratégias de resolução).
3. **CONTROLE** (a forma como os indivíduos gerem a informação a que têm acesso).
4. **SISTEMA DE CONVICÇÕES** (a visão que os indivíduos têm de si próprios, da matemática, da resolução de problemas e do mundo em geral).

Deste modo, a investigação relacionada com o ensino da resolução de problemas evolui de um paradigma quantitativo orientado para os produtos, para um paradigma mais qualitativo, exploratório e orientado para os processos.

Embora não exista consenso relativamente à existência de uma estratégia para ensinar a resolver problemas constata-se a existência de características comuns aos bons resolvidores de problemas. Assim, com base numa prática lectiva e partilhando a ideia defendida por muitos investigadores, há determinadas estratégias que podem constituir uma óptima ferramenta para ensinar os alunos a serem melhores resolvidores de problemas. Deste modo, um professor pode organizar as suas actividades com o objectivo de melhorar a capacidade de resolver problemas. Assim, deve:

1. ENSINAR AO ALUNO CONTEÚDOS MATEMÁTICOS
2. ENSINAR O ALUNO A TRABALHAR COM INSTRUMENTOS TECNOLÓGICOS
3. CONFRONTAR OS ALUNOS COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
4. ENSINAR AO ALUNO UMA FORMA SISTEMÁTICA E ORGANIZADA DE RESOLVER PROBLEMAS.
5. ENSINAR AO ALUNO ESTRATÉGIAS GERAIS (QUESTÕES HEURÍSTICAS) DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

Para que o campo de resolução de problemas não seja limitado é im-

portante que os alunos possuam determinados conceitos. As tecnologias incluindo a calculadora electrónica e computadores deverão ser utilizados de forma a libertar os alunos das tarefas fastidiosas de cálculo permitindo-lhes que se concentrem na resolução de problemas. Todavia, para que o aluno se torne bom resolvidor de problemas há que confrontá-lo com a própria resolução, pois é através deste processo que ele irá adquirir e desenvolver capacidades básicas da resolução.

Vários autores têm sugerido modelos de resolução de problemas. Polya (1975) identifica quatro etapas na resolução de qualquer problema:

- COMPREENSÃO DO PROBLEMA
- CONCEPÇÃO DE UM PLANO
- EXECUÇÃO DO PLANO
- REFLEXÃO SOBRE O QUE FOI FEITO

Segundo Raposo (1994) existem sete estádios na resolução de problemas:

1. DETECTAR O PROBLEMA (discrepância entre o que se tem e o que se pretende alcançar).
2. ESPECIFICAÇÃO DO PROBLEMA (estabelece-se uma descrição mais precisa do problema).

3. ANÁLISE DO PROBLEMA (as partes do problema são calculadas e é reunida a informação relevante).
4. GERAÇÃO DE SOLUÇÕES (consideram-se as soluções possíveis).
5. TESTAGEM DE SOLUÇÕES (as diversas soluções possíveis são consideradas e avaliadas com vista à probabilidade do sucesso).
6. SELECÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DE SOLUÇÕES (a solução mais provável é implementada em pormenor e avaliada de forma a ter sucesso).
7. REVISÃO DA SOLUÇÃO SE NECESSÁRIO.

Os autores têm-se debruçado de um modo particular sobre a organização das actividades, de um modo geral apresentam várias etapas que deverão ser consideradas em qualquer processo de aprendizagem em novas situações. Saliente-se ainda que o professor desempenha um papel determinante na continuidade do desenvolvimento do conhecimento matemático, funcionando como um dinamizador na construção cognitiva do pensamento matemático.

4.2. ACTUAÇÃO DO PROFESSOR

Para saber resolver problemas, não é suficiente ter conhecimentos matemáticos e conhecer estratégias de resolução. A maioria das vezes os alunos sentem dificuldade em relacionar esses conhecimentos e em gerir a sua aplicação.

Garofalo (1987) afirma que é necessário desenvolver nos alunos as capacidades metacognitivas, para ajudar a participar mais activamente na aprendizagem da matemática. Isto é, os estudantes devem *fazer matemática*, em vez de se limitarem a memorizar factos e procedimentos. Este investigador sugere três tipos de acções para o professor desenvolver as capacidades metacognitivas dos seus alunos. O professor deve:

1. Encorajar os estudantes a interrogarem-se acerca do que estão a fazer e reflectir acerca dos seus conhecimentos matemáticos. Nesta fase é importante que os professores reajam construtivamente às respostas dos estudantes.
2. Ajudar os estudantes a desenvolverem um sistema de convicções que possa contribuir para melhorar o seu desempenho. Por exemplo, os professores poderão mostrar que alguns problemas de matemá-

tica podem demorar várias horas ou dias a resolver, outros poderão ter mais do que uma solução e outros não ter mesmo qualquer solução.

3. Modelar resolução de problemas que mostrem de forma clara os processos envolvidos e deverão ensinar os estudantes a controlar e a regular os seus conhecimentos matemáticos.

É importante que o professor ensine os seus alunos a resolver problemas. Assim, o professor durante a sua prática pedagógica deve:

- Actuar como **modelo** enquanto resolve o problema e posteriormente como orientador do processo. Assim deve: pensar alto, referir-se a cada uma das etapas do processo, justificar as acções tomadas em cada uma delas, explicitar as razões que o levaram a optar por uma determinada estratégia.
- **Corrigir concepções erradas** que os alunos têm sobre a resolução de problemas
- **Desbloquear situações de impasse.**

Durante a sua actuação como modelo que o professor deve começar a corrigir concepções erradas que os

alunos têm, a priori, sobre a resolução de problemas e da matemática em geral. Muitas das causas do fraco rendimento dos alunos reside nas ideias subjacentes à resolução de problemas. Assim, para muitos,

- um problema resolve-se de um momento para o outro
- um problema tem sempre solução e essa solução é única
- existe um único caminho para a resolução de um problema
- só os génios podem descobrir coisas em matemática

concepções muito comuns que é preciso contrariar.

O professor deve ter bom senso e sensibilidade para intervir no momento certo de modo a provocar o aparecimento de ideias as quais não surgem de imediato. O papel do professor é extremamente importante quando passa a actuar como orientador e desbloqueador de situações de impasse.

Do mesmo modo que não existe uma estratégia para ensinar a resolver problemas, também não há uma estratégia de actuação do professor que lhe permita desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas. No entanto, Lester (1985) sugere um guia de actuação do professor. (Quadro I)

ACÇÕES DO PROFESSOR		INTENÇÕES DO PROFESSOR
<ul style="list-style-type: none"> • Pedir a um aluno para ler um enunciado em voz alta. Discutir palavras ou frases que possam levantar dúvidas. • Pedir a um aluno para recontar o problema, usando palavras suas. • Discutir com toda a turma a compreensão do problema, fazendo os comentários adequados. • Discutir com toda a turma possíveis estratégias de resolução. 	A N T E S	<ul style="list-style-type: none"> • Mostrar como é importante a leitura cuidadosa do problema e centrar a atenção em certas palavras que têm significado especial. • Realçar a importância que tem a compreensão do enunciado e do problema • Centrar a atenção em dados importantes e clarificar partes do problema • Fazer surgir ideias sobre possíveis maneiras de resolver o problema
<ul style="list-style-type: none"> • Observar e pôr questões aos alunos, no decurso do trabalho, dando sugestões se necessário • Proporcionar extensões do problema, se necessário • Pedir aos alunos que resolveram o problema para dar a resposta. 	D U R A N T E	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar os pontos fracos dos alunos. Ajudar os alunos a ultrapassar situações de impasse • Desafiar e encorajar os alunos mais rápidos a generalizar a sua estratégia de resolução de um problema semelhante • Proporcionar o confronto das soluções e a discussão da sua plausibilidade.
<ul style="list-style-type: none"> • Pedir aos alunos que expliquem e discutam as estratégias de resolução que utilizaram • Pedir aos alunos que relacionem o problema com problemas já resolvidos. 	D E P O I S	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar as diferentes estratégias que permitiram resolver o problema • Mostrar que as estratégias de resolução de problemas não são específicas de um dado problema e ajudar os alunos a reconhecer diferentes tipos de situações, onde estas estratégias podem ser úteis.

QUADRO I : Guia de actuação do professor (Lester, 1985)

Do mesmo modo que é necessário que os alunos resolvam problemas para terem consciência que os sabem resolver, um professor só poderá ter consciência da sua habilidade de ensinar a resolver problemas praticando essa actividade frequentemente nas suas aulas. É com base numa prática frequente e num intercâmbio de ideias entre vários professores que se poderá saber mais sobre a resolução de problemas.

4.3. ACTUAÇÃO DOS ALUNOS

Um artigo publicado no *Arithmetic Teacher* de Janeiro de 1988, coloca em evidência a necessidade de promover mudanças nas concepções dos alunos acerca da matemática e da resolução de problemas. Muitos dos alunos têm a concepção de que aprender a *fazer matemática* é ouvir dos professores um conjunto de factos, regras e procedimentos e ser capaz de chegar perante um exercício, à resposta certa.

Para a maioria dos alunos a resolução de problemas é uma actividade marginal. Martha Frank (1988), embora tenha consciência de que as concepções dos alunos não mudam de um dia para o outro apresenta algumas sugestões que poderão influenciar positivamente a actuação dos alunos na resolução de problemas. As

sugestões seguintes dirigem-se para o desenvolvimento de concepções acerca da Matemática que se tornarão úteis na resolução de problemas. O aluno deve:

1. **Começar cedo a resolver problemas.** É conveniente que todos os alunos tenham oportunidade para resolver exercícios e problemas desde o início da escolaridade.
2. **Estar certo que o problema proposto é mesmo um problema.** Os problemas propostos aos alunos devem constituir um desafio. Devem também requerer o uso de estratégias como a organização de dados, construção de gráficos ou esquemas, procura de modelos, trabalhar do fim para o princípio ou ensaiar métodos de tentativa-erro.
3. Os alunos deveram **trabalhar frequentemente em pequenos grupos.** Os alunos necessitam de oportunidades para explorar a matemática uns com os outros. Necessitam de justificar os seus raciocínios matemáticos uns aos outros e não depender só do professor.
4. **Centrar a atenção nos processos de resolução e não nas soluções.** Deve-se discutir todo o processo de resolução e não apenas as respostas numéricas.

Os alunos em vez de se limitarem a apresentar a resposta final, devem ser encorajados a mostrar como resolveram o problema e quais as estratégias utilizadas.

5. Não colocar a ênfase no cálculo.

Não surpreende que os alunos acreditem que a matemática é cálculo, quando muitos professores gastam mais de 70% dos seus tempos lectivos com algoritmos de cálculo e memorização de regras (Wheathey, 1983).

A concepção da matemática como um conjunto de regras que se aplicam em situações bem definidas surge ligada à ideia da matemática como algo que é imposto do exterior. É vista frequentemente como algo que foi inventado ou descoberto pelos matemáticos ao longo dos séculos e que existe de uma forma acabada. O facto da matemática poder ser vista como uma **construção pessoal** parece ser um argumento muito forte que possibilitará aos alunos um gosto por *fazer matemática*. A resolução de problemas, poderá dar sem dúvida o seu contributo.

5. IMPLICAÇÕES EDUCACIONAIS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Uma excessiva preocupação com determinadas destrezas e regras de cálculo têm dominado a matemática

que se ensina e a forma como a matemática é ensinada. Em consequência, os objectivos da matemática eram muito limitados, não encorajando raciocínio, intuição, nem mesmo a resolução de problemas. Através de uma tónica que se baseia em actividades de rotina, os jovens tornavam-se meros receptores de regras e procedimentos, em vez de participantes activos na construção do conhecimento.

De facto, ao pretender que as crianças vejam a matemática como um assunto útil e prático, elas terão que perceber que esta pode ser aplicada a uma variedade de fenómenos e de problemas de mundo real. A resolução de problemas pode contribuir largamente para este fim, constituindo um dos objectivos principais do estudo matemático.

Assim, a resolução de problemas permite que:

1. O aluno ganhe confiança em si, nas suas aptidões para pensar e para comunicar matematicamente;
2. o aluno aprenda a tomar decisões apropriadas na selecção de estratégias e técnicas adequadas, quer no interior da matemática quer nas áreas que lhe são exteriores;
3. o aluno reconheça estruturas matemáticas familiares em cenários desconhecidos;

4. os alunos adquiram a capacidade para detectarem regularidades e para analisar os dados;
5. o aluno aplique o processo de **modelação matemática** (Figura 1) a situações problemáticas do mundo real.

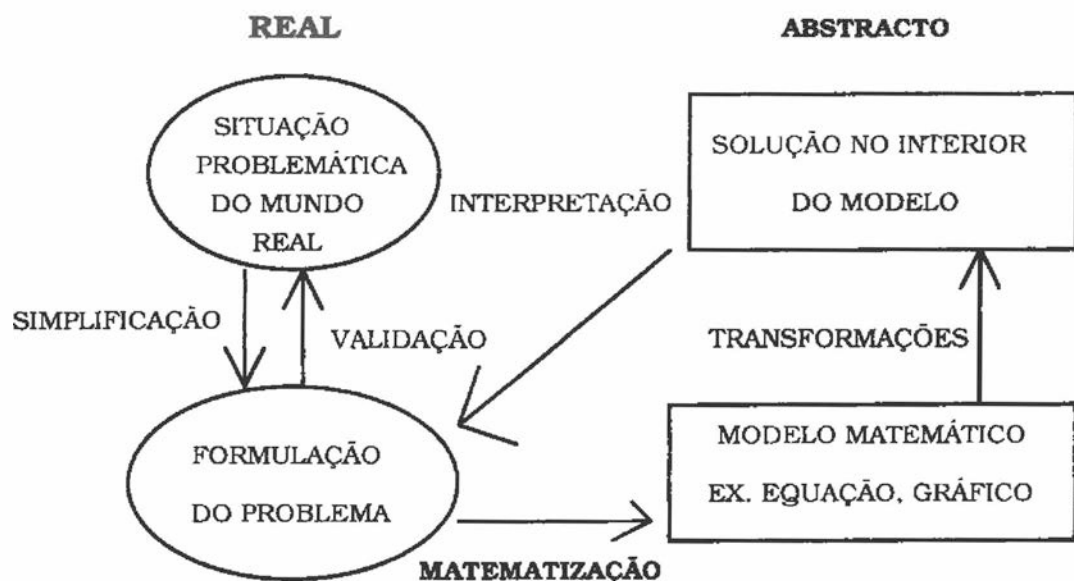


FIGURA 1: MODELAÇÃO MATEMÁTICA (N.C.A.M.E., 1991)

A importância de uma aprendizagem activa tem muitas implicações no desenvolver das capacidades dos jovens. Cabe ao professor criar um ambiente que encoraje as crianças a explorar, desenvolver, testar, discutir, e aplicar ideias. A aprendizagem deverá envolver os alunos intelectual e fisicamente. As estratégias de ensino deverão incidir no envolvi-

mento dos alunos no processo de aprendizagem, e não na simples transmissão de conhecimentos.

Aos alunos devem surgir oportunidades que estimulem a um trabalho cooperativo, a utilização de tecnologias, bem como a elaboração de ideias matemáticas relevantes e interessantes, experimentando o poder e a utilidade da matemática.

6. CONCLUSÃO

A necessidade da matemática e a sua utilização, no futuro, implicam que as capacidades de *pensar de raciocinar* e de *resolver problemas* devem constituir um dos principais objectivos do estudo da matemática. Assim, o ensino da matemática deve procurar desenvolver no aluno a confiança nas suas aptidões para pensar e comunicar matematicamente, para resolver problemas, para demonstrar flexibilidade ao trabalhar nas ideias matemáticas e nos problemas, para tomar decisões apropriadas na selecção de estratégias e de técnicas, para reconhecer estruturas matemáticas familiares em cenários desconhecidos, para detectar regularidades e para analisar dados.

A aula de matemática deve proporcionar um ambiente adequado para o desenvolvimento de aptidões, de forma a que os alunos compreendam que o conhecimento confere poder e que as diferentes matérias se relacionam todas, nesta perspectiva mais ampla.

O ensino da resolução de problemas é um processo reconhecidamente complexo que requer bem mais do que ensinar problemas que se resolvam através da aplicação directa de um algoritmo. Os estudantes necessitam de ser directamente envolvidos

no processo, os problemas têm de constituir um desafio, os modos de ensino têm de ser variados e os estudantes têm de ser familiarizados com a utilização de estratégias de resolução. O ensino tem de se afastar do modo tradicional, em que os processos se centram nos professores e aproximar-se de um modo mais activo em que os estudantes se envolvem na construção da sua própria aprendizagem.

O que normalmente se verifica é que os alunos passam a maior parte do seu tempo nas salas de aula a praticar algoritmos, a ouvir a explicação do professor e a resolver problemas individualmente. Este não será certamente o tipo de ensino que ajudará os estudantes a pensarem matematicamente.

A resolução dos problemas de matemática vai permitir ao aluno adquirir e desenvolver capacidades que mais tarde vai utilizar na sua vida futura. É preciso que os alunos sejam bons resolvedores de problemas.

O desenvolvimento destas características nos jovens requer que as escolas lhes permitam experiências apropriadas desde o princípio da sua educação. Este objectivo tem que influenciar a forma como a matemática é ensinada e a forma como os alunos se confrontam com a matemática e a aplicam ao longo da sua educação.

7. BIBLIOGRAFIA

- BASTIEN, C., Les modèles de résolution de problèmes *in* CAVERNI, J.P., *op. cit.*
- CAVERNI, J.P., *Psychologie cognitive, modèles et méthodes*, Paris, PUF, 1988
- GEORGE, F., *Models of Thinking*, London, George Allen And Uniwinn LTD, 1970
- GIL, F., *Mimésis e negação*. Lisboa, Imprensa Nacional - Casa da Moeda, 1984.
- GREENO, J. G. & SIMON, H. A.. *Problem solving and reasoning*. New York, John Wiley & Sons, 1988.
- GUILLEN, M., *Pontes para o Infinito - O lado humano das matemáticas*, Gradiva, 1983
- HOC, J.M., *Psychologie cognitive de la planification*, Grenoble, P.U.G., 1987
- LESTER, F.K., *Problem Solving: Is it a problem?*, Lindquist, 1985
- LÉVY-SCHOEN, A. Les mouvements des yeux comme indicateur des processus cognitifs *in* Caverni, J.P., *op cit*
- LOPES, A.V. et al., *Actividades matemáticas na sala de aula*, Lisboa, Texto Editora, 1990
- NEWELL, A. & SIMON, H. A. *Human problem solving*. New Jersey, Englewood Cliffs, 1972.
- PINHO, M. S., *Texturas da Resolução de Problemas: a abordagem do pensamento pela escola de Wurzburg, pela Teoria da Forma e pela Inteligência Artificial*. Coimbra, 1991.
- POLYA., G., *A arte de resolver problemas*, tradução em língua portuguesa, Rio de Janeiro, Interciência, 1975
- PRADINES, M. *Traité de psychologie générale*, I, II, III. Paris, P. U. F., 1986.
- THOM, R. Compreender é a questão crucial para o futuro da Humanidade. *J.L.-Jornal de Letras, Artes e ideias*, 26 de Outubro de 1987, 16-17.
- WHEATLEY, G. H. *A Mathematics Curriculum for the Gifted and Talented*. New York, Gifted Child Quarterly, 1983.
- Outros documentos:
- Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, Lisboa, A.P.M.e I.I.E., 1991
- Revista Educação e Matemática* Nº 21 1992
- Aula de resolução de problemas do curso de Mestrado em Psicologia Pedagógica do módulo *Questões Aprofundadas de Psicologia Escolar* leccionada pelo Professor Doutor Nicolau Vasconcelos Raposo no dia 21/06/1994.