ACERCA DO NÚMERO π

*ANTÓNIO JÚLIO TOUCINHO DA SILVA**

O número π é um número fascinante que tem atraído os matemáticos ao longo dos tempos e que desde a antiguidade ocupa um lugar especial. Já se escreveram vários livros sobre ele e sobre a sua história, e quase todos os grandes nomes da matemática lhe dedicaram parte da sua atenção. Porquê? Que tem ele de especial? ... Poderemos perguntar! É a estas questões que vamos procurar dar resposta percorrendo, embora de forma sucinta, a história do número π.

Definição

Comecemos por recordar que se entende por número π a razão entre o comprimento (perímetro) de uma circunferência e o seu diâmetro. Esta definição baseia-se no facto de ser constante o quociente entre o comprimento P de uma circunferência e o seu diâmetro d, o que permite escrever

$$\pi = \frac{P}{d}$$

Não se sabe exactamente como na antiguidade se chegou a esta conclusão, mas muito provavelmente o interesse pelo número π terá tido a sua origem em problemas de determinação de áreas e na constatação empírica de que duplicando ou triplicando o diâmetro de uma circunferência o seu perímetro também duplica ou triplica. Isto é, permanece constante a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência, qualquer que seja o seu raio.

Desde que no homem despertou o interesse por este número que se iniciou um longo período de árduos esforços, que só viria a terminar no final do século passado, para o determinar com cada vez maior exactidão e para conhecer a sua natureza teórica.

Nos tempos mais remotos

As determinações de π mais antigas que se conhecem remontam ao médio oriente, ao antigo Egipto e à Babilónia. Os babilónios tomaram o valor $\pi = 3\ 1/8$ e os egípcios

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$$

Não sabemos como é que se chegou a estes valores mas não é difícil adivinhar. Suponhamo-nos no antigo Egipto onde não existem medidas standard nem instrumentos de medida calibrados. Suponhamo-nos ainda nas areias do Nilo, sem qualquer compasso, lápis ou régua, dispondo apenas de cordas e estacas de madeira.

* Docente da ESE de Beja

Com estes instrumentos desenhamos uma circunferência na areia, representamos sobre uma corda unidades de comprimento igual ao do diâmetro [AB] da circunferência (ver figura 1) e seguidamente estendemos a corda ao longo do sulco produzido por forma a "*medir*" o perímetro da circunferência. Veremos então que aquelas marcas correspondem aos pontos A, C, D e E, pelo que, sendo o comprimento de [AB] a unidade de medida, o comprimento da circunferência é 3 unidades mais uma parte correspondente ao arco AE. Em seguida, colocando sucessivas vezes a corda correspondente ao arco AE sobre o diâmetro, conclui-se que [AE] cabe em [AB] entre 7 e 8 vezes, pelo que se chegaria a

$$3\frac{1}{8} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

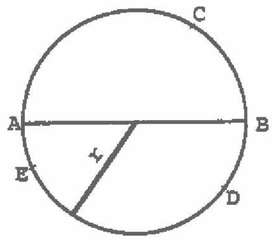


Fig. 1

Como se poderia determinar π nas areias do Nilo

Assim, é natural que alguns povos, desprezando o comprimento do arco AE, tenham tomado $\pi = 3$ [1] enquanto outros $\pi = 3\ 1/7$ ou $\pi = 3\ 1/8$.

Os povos antigos tinham regras para calcular a área de um círculo, cuja origem hoje desconhecemos, excepção feita ao que respeita ao antigo Egipto. A área de um círculo de raio r é, como sabemos, $A = \pi r^2$ mas como terão os povos antigos chegado aqui? Muito provavelmente recorrendo ao método de decomposição (exemplificado na figura 2). Assim, se aplicarmos

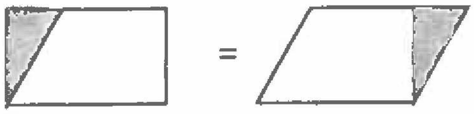


fig. 2

O método de decomposição permite verificar que as áreas do paralelogramo e do rectângulo são iguais

o método a um círculo, podemos transformá-lo num *quase-paralelogramo* de base $2\pi r$ e altura r,com área dupla da do círculo e que tem área $A = 2\pi r^2$

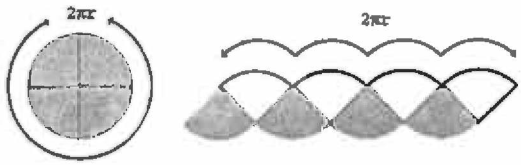
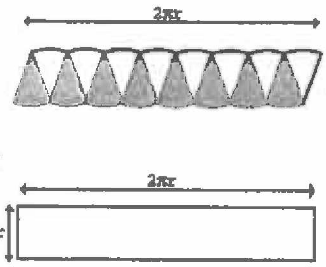


Fig. 3

Cálculo da área de um círculo. As três figuras da direita têm área dupla da do círculo.



como mostra a figura 3.

Se o recurso a este processo é uma mera suposição, o método utilizado pelos egípcios para calcular a área de um círculo, e consequentemente determinar π, é bem conhecido. De facto, dos povos do período pré-helénico é sobre o egípcio que mais sabemos porque foi dele que chegaram mais documentos até nós. Entre estes documentos assume particular importância o chamado *papiro de Rhind* [2], que apresenta 84 problemas e as respectivas resoluções. De entre eles o que mais nos interessa agora é o nº 50 onde se calcula π e assume (de acordo com o problema 48) que a área de um círculo de 9 unidades de de diâmetro é igual à área de um quadrado de 8 unidades de lado.

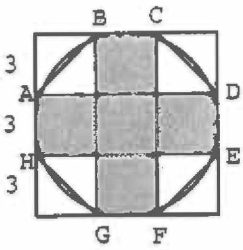


fig. 4

Método egípcio para o cálculo da área de um círculo, descrito no problema 48 do papiro de Rhind.

Como se pode observar na figura 4, a área do octógono irregular [ABCDEFGH] é aproximadamente igual à do círculo de raio 9. Como a sua área é igual à de sete quadrados de três unidades de lado, o que faz 63 unidades de área, então conclui-se que a área de um círculo de diâmetro 9 é próxima da de um quadrado de lado 8 [3]
Daqui vem (problema 50) [4]

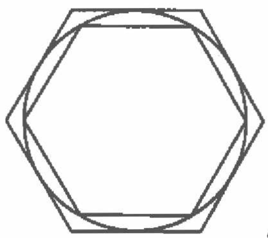
$$\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 8^2 \qquad \text{donde} \qquad \pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$$

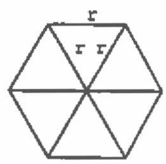
o que conduz a 3.160493827... , ou seja 3,16, valor por defeito usado pelos egípcios.

Início do período teórico com Arquimedes

É com **Euclides** que se inicia um período importante da história da matemática, caracterizado pela procura do rigor teórico que, no que respeita ao número π, irá culminar em **Arquimedes** de Siracusa, o maior génio matemático da antiguidade. Durante o período de ouro da matemática grega procedeu-se à compilação de todo o saber composto de regras empíricas coleccionadas ao longo dos tempos, a que se procurou dar uma consistente e sistemática justificação teórica.

Dentro deste espírito **Arquimedes** recorreu a um processo que consistia em inscrever e circunscrever uma circunferência em polígonos regulares de 6 [5], 12 , 24, 48 e 96 lados. Como a figura 5 ilustra relativamente a um hexágono, o perímetro da circunferência está assim compreendido entre os perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito. Ora, **Arquimedes** apercebeu-se que à medida que vamos duplicando o número de lados dos polígonos vamos obtendo um limite superior e um limite inferior cada vez mais próximos de π.





Processo utilizado por Arquimedes para calcular

fig. 5

Desta forma **Arquimedes** chegou a

$$3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}$$

ou seja

3,140845.. < π > 3,142857...

Convém aqui notar que o raciocínio de **Arquimedes** envolve a noção de limite, assume a existência de duas sucessões, dos perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos, que têm como limite comum o número procurado. À luz dos conceitos actuais podemos dizer que **Arquimedes** peca por não ter demonstrado de forma rigorosa a existência daquele limite mas essa era uma preocupação que estava fora da mentalidade da época e que os recursos de então dificilmente resolveriam.

De Arquimedes a Viète

Durante longos anos foi aquela a melhor determinação de π até que no século III d.C. o matemático chinês **Liu Hui**, recorrendo a um polígono de 192 lados obteve a aproximação

$$3,141024 < \pi < 3,142704$$

que ele próprio terá melhorado para π = 3,14159 recorrendo a um polígono de 3072 lados. Mais tarde, no século V, o também chinês **Tsu Chung-Chih** chegou a uma aproximação muito mais exacta $3,1415926 < \pi < 3,1415927$. No final desse século o astrónomo hindu **Aryabhata** encontrou um valor surpreendentemente aproximado

$$\pi = \frac{3927}{1250} = 3,1416 ,$$

e no século XII o matemático hindu **Bhaskara**, provavelmente recorrendo ao método arquimediano com um polígono de 384 lados, deu este valor como exacto. Contudo os hindus mantiveram sempre o hábito de tomar $\pi = \sqrt{10}$, valor mencionado por *Brahmagupta* no século VII.

Aquele valor, 3,1416 , é também indicado pelo famoso matemático árabe **Al-Kwarismi** [6] no século XI mas, tal como os hindus, os árabes continuaram a adoptar $\pi = \sqrt{10}$.

Na Europa não se conhecem importantes contribuições para o cálculo de π anteriores ao século XVI [7]. De facto, apesar de a Europa ter conquistado um lugar de cada vez maior destaque a partir do fim do primeiro milénio, teve-o nos domínios político, económico e militar, não no científico. O império romano deu particular realce ao estudo do direito e da arte da guerra, esqueceu as ciências e impediu o estudo e a divulgação do saber anteriormente adquirido por outros povos. Os romanos não gostavam da ciência, preferiam o sangue dos cristãos atirados aos leões ou das lutas de gladiadores até à morte. O regime romano não permitiu o desenvolvimento das ciências, representou um domínio de bárbaros literados e a sua queda veio dar lugar ao domínio de bárbaros iletrados oriundos do norte e do leste. Aos poucos o domínio da igreja católica foi tornando-se cada vez maior e *"ao desastre seguiu-se a catástrofe"* [8] personificada pelo papel da Inquisição. Entre os tempos áureos da universidade de Alexandria e a idade média assistiu-se à destruição de milhares de obras científicas, mesmo de bibliotecas inteiras, pelas mãos de fanáticos religiosos e de bárbaros ávidos de sangue e destruição. Assim aconteceu com a biblioteca de Alexandria em 391, com 100 mil livros árabes após a tomada de Tripoli pelos cruzados em 1109, com toda a literatura maia mandada queimar em 1560 pelo bispo de Yucatan e com 24 mil livros existentes em Granada.

De Viète ao cálculo diferencial e integral

Com **Viète** (1540-1603) nasce um novo método para a determinação de π, o método dos limites, caracterizado pela utilização de processos infinitos de cálculo envolvendo expressões onde figura uma infinidade de operações. Embora seguindo as linhas gerais do método arquimediano, **Viète** partiu de um quadrado em vez de um hexágono e chegou a

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

* [9] Vejamos qual o caminho que ele seguiu. **Viète** trata essencialmente de comparar a área de um polígono de **n** lados com a de um polígono de **2n** lados *(veja-se a figura 6 na página seguinte)*. Sendo a área do polígono de **n** lados dada por A(n) igual a n vezes a área do triângulo [AOB],

vem

$$A(n) = \frac{1}{2}nr^2\text{sen } 2\beta = nr^2\text{sen } \beta\cos\beta$$

De forma análoga vem

$$A(2n) = nr^2\text{sen } \beta$$

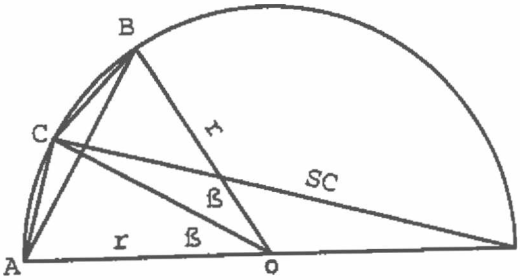


fig. 6

e

$$\frac{A(n)}{A(2n)} = \cos\beta$$

Se voltássemos a duplicar o número de lados do polígono teríamos

$$\frac{A(n)}{A(4n)} = \frac{A(n)}{A(2n)}\cdot\frac{A(2n)}{A(4n)} = \cos\beta\cos\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

Repetindo o processo k vezes viria

$$\frac{A(n)}{A(2^k n)} = \frac{A(n)}{A(2n)}\cdot\frac{A(2n)}{A(4n)}\cdot\ldots\cdot\frac{A(2^{k-1}n)}{A(2^k n)} =$$

$$= \cos\beta\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2^k}\right)$$

Como k tende para infinito, a área de um polígono regular de 2^k lados coincide com a área de um círculo de raio r, isto é πr^2, fazendo esta substituição no quociente anterior obtemos

$$\pi = \frac{\frac{1}{2}n\text{sen}2\beta}{\cos\beta\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2^2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2^3}\right)\cdots}$$

Tomando como ponto de partida um quadrado temos n = 4 e ß = 45° donde

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

Há que notar que **Viète** não tinha ainda o conceito de convergência e por isso não teve em conta que a sequência infinita de operações poderia conduzir a uma **explosão** até ao infinito [10]. Por outro lado a quantidade de raízes e a lenta convergência da fórmula foram sempre um obstáculo ao seu aproveitamento prático.

O movimento renascentista de que **Viète** fez parte trouxe-nos uma época de caça às casas decimais de π e os últimos arquimedianos que foram utilizando refinamentos introduzidos no método original principalmente por **Snelluis** (1580-1626) e **Huygens** (1629-1695). Sensivelmente na mesma altura em que **Viète** descobria a sua fórmula, nos Países Baixos dois homens, entre outros, calculavam π com um número de decimais exactos nunca antes atingido. Foram eles **Adrianus Romanus** (1561-1615) com 15 decimais e **Ludolph van Ceulen** (1540-1610) com 35 ! Mas o método arquimediano acabou por dar lugar aos algoritmos infinitos, principalmente depois da descoberta do cálculo diferencial e integral.

Pouco depois de **Viète** o escocês

John Wallis (1616-1703) chegou a

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

e **Lord William Brouncker** (1620-1684) a

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cdots}}}}}$$

que é uma das primeiras contribuições para a teoria das fracções contínuas. Já na segunda metade do século XVII James Gregory (1638-1675) e Leibniz (1646-1716), a partir de

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x$$

chegaram quase simultaneamente a

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

onde, fazendo x = 1 vem

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

ou seja

que constitui a primeira série infinita que converge para π, mas que é de convergência muito lenta (são necessários cerca de 5000 milhões de termos da séria para se obter π com dez casas decimais exactas). De forma ~~idêntica~~ **Newton** partiu de

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x$$

donde, recorrendo ao desenvolvimento binomial que ele próprio descobrira, obteve

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots\right)dx$$

pelo que

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots$$

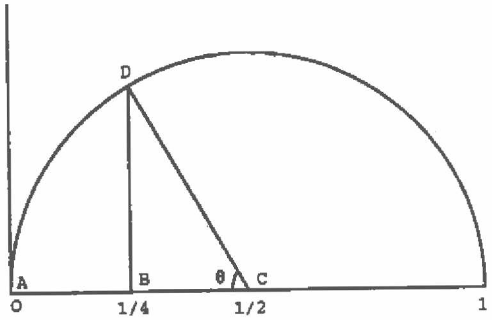
que é uma série que converge incomparavelmente mais depressa que a de Leibniz. Daqui podemos obter π fazendo

$$\frac{\pi}{6} = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2}$$

donde

$$\pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \cdots\right)$$

Apesar de ser isto o que normalmente os livros dizem sobre a forma como **Newton** calculou π, um olhar atento sobre o seu **Method of Fluxions and Infinite Series** permite-nos constatar que Newton seguiu outro caminho que consiste em considerar um círculo de raio 1/2 e centro (1/2,0), **(ver figura 7)**.



Como Newton calculou π
fig. 7

* Newton calculou a área A do conjunto definido pelos pontos ABD, isto é

$$A = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3.2^3} - \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{28.2^7} - \frac{1}{72.2^9} - \ldots$$

recorrendo mais uma vez ao desenvolvimento binomial. Como aquela área é igual à do sector circular ACD menos a do triângulo [BCD], vem

$$A = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}$$

donde Newton chegou a

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{28.2^7} - \frac{1}{72.2^9} \ldots\right).$$

Desta forma podemos obter π com uma certa facilidade pois 22 termos da série são suficientes para o calcular com 15 decimais exactos.

Como vimos atrás com a série de **Leibniz**, não é fácil obter relações onde figure a função arctgx que forneçam processos rápidos de cálculo. Contudo surgiram algumas como por exemplo

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$$

por **Leonard Euler** (1707-1783),

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$$

por **L.K. Schultz von Strassnitzky** (1803-1852), ou ainda

$$\frac{\pi}{4} = 4.\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$$

apresentada em 1706 por **John Machin** (1680-1751). A segunda foi fornecida por **Strassnitzky** ao famoso calculador **Dase** [11] que com ela calculou π em 1844 com 200 decimais em menos de dois meses de trabalho. A terceira foi utilizada por **William Shanks** (1812-1882) em 1874 para calcular π com 707 decimais [12].

O método de Monte Carlo

Ao falar do número π é forçoso falar também no seu cálculo através do método de Monte Carlo. De uma forma geral, este consiste em calcular um número a partir de um fenómeno aleatório e uma das muitas maneiras de o aplicar na determinação de π consiste em recorrer ao chamado problema da agulha de **Buffon** [13] (1707-1788). Este problema consiste em, lançando aleatoriamente uma agulha de comprimento L sobre uma superfície plana repleta de linhas rectas paralelas todas a uma distância d (d > L) umas das outras, determinar a probabilidade P de a agulha intersectar uma dessas rectas. Buffon, como ficou conhecido, resolveu o problema e chegou a

$$P = \frac{2L}{\pi d}$$

donde mais tarde **Laplace** (1749-1827) obteve

$$\pi = \frac{2L}{dP}$$

o que permite calcular π. Para tanto há que determinar P experimentalmente, procedendo ao lançamento da agulha e calculando o quociente entre o número de vezes que a agulha intersecta uma linha e o número de lançamentos [14]. Este método é teoricamente correcto. Resulta, pois permite calcular π experimentalmente. Contudo não é eficiente pois a probabilidade de se obter π com 5 decimais exactos em 3400 lançamentos é de apenas 1,5/100! [15].

A era dos computadores

Com o aparecimento do computador a caça aos decimais de π tornou-se muito mais fácil, cómoda e rápida. O primeiro cálculo de π com computador realizou-se em 1949 com o ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) no Labotatório de Pesquisa Balística dos Estados Unidos e determinou π com 2037 decimais em 70 horas, recorrendo à fórmula de **Machin**. Em 1954 o NORC (Naval Ordnance Research Computer) calculou π com 3089 decimais em apenas 13 minutos. e mais tarde, em 1958, o Centro de Processamento de Dados de Paris calculou π com 10000 decimais com um IBM 704, em 1 hora e 40 minutos. Depois destes, muitos cálculos têm sido realizados em universidades e outras instituições ligadas à investigação. Embora o interesse destes cálculos seja puramente académico ou do âmbito da computação, eles não têm parado, como se pode ver na tabela da página seguinte. A última notícia difundida dá-nos conta que **Yasumasa Kanada** calculou π com 201 326 000 casas decimais em 1988 na Universidade de Tóquio, em 6 horas com um supercomputador construído pela Hitachi [16].

Ano	Computador	Número de casas decimais	Tempo gasto	Programadores
1949	ENIAC	2037	70h	J. von Neumann
1954	NORC	3093	30 min	
1959	IBM 704	16067	4h 15m	F. Genuys
1961	IBM 7090	100265	8h 45m	Shanks e Wrench
1966	IBM 7030	250000	28 h	Guilloud e Fillatoire
1967	CDC 6600	500000	26h 45m	Guilloud e Dichampt
1974	CDC 7600	1000000	23h 15m	Guilloud e Bouyer
1981	FACOM M 200	2000038		Miyoshi e Nakayama
1982	HITAC M 280 H	4194293	3h	Tamura e Kanada
1983	HITAC M 280 H	8388608	6h 45m	Tamura e Kanada
1983	HITAC M 280 H	16777216	30h	Tamura e Kanada
1986	Cray 2	29360000		Bailey e Borwein
1987	NEC SX 2	134217728	36h	Kanada
1988	Hitachi	201326000	6h	Yasumasa Kanada

fonte: *Notes on the History of π*, Cabisco Mathematics, Burlington, 1988.

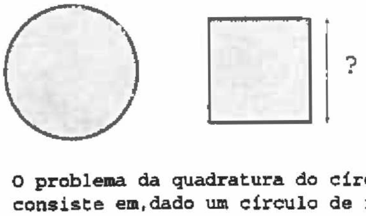
A natureza teórica do número π

A grande questão que esta pequena história da determinação de π pode levantar é a de sabermos qual o seu interesse prático. Porquê querer calcular π com tantas casas decimais? O interesse prático não é nenhum e as casas decimais para além das primeiras não têm qualquer valor científico. Quatro decimais são suficientes para projectar o mais potente e refinado dos motores e dez decimais permitem calcular o comprimento de um meridiano terrestre com um erro inferior a uma polegada! Esta questão teve, isso sim, um grande interesse teórico, pelo menos até ao final do século passado, que consistiu na determinação da natureza do número π. Fundamentalmente a questão centrava-se em saber se se trata de um número racional ou irracional [17] e está intimamente ligada, desde a antiguidade, ao célebre problema da quadratura do círculo. **(ver figura 8)** Daí a preocupação de calcular π com cada vez mais decimais, na procura de uma lei na dízima que teimosamente não se conseguia descortinar. Esta questão só viria a ficar resolvida quando, em 1766, **Lambert** (1728-1777) demonstrou que π é irracional.

* **Lambert** começou por demonstrar o teorema: **se x é um número racional diferente de zero então a tangente de x é um número irracional**. Desta forma, se tgx é racional, então x ou é zero ou é irracional. Se atendermos a que

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

então $\pi/4$ e também π são irracionais.



O problema da quadratura do círculo consiste em, dado um círculo de raio qualquer, construir um quadrado com área igual.

fig. 8

Para encerrar questão da natureza teórica de π faltava no entanto saber se π é um irracional algébrico ou transcendente. Convém a propósito recordar aqui que um número se diz algébrico se é solução de uma equação algébrica de coeficientes racionais, isto é do tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

São algébricos os números $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{2}$, i ou $-1+\sqrt{5}\,i$ pois são solução, respectivamente, das equações $x^2-3=0$, $x^5-2=0$, $x^2+1=0$ e $x^2+2x+9=0$. Nem todos os números são algébricos, por exemplo o número e = 2.718281828..., conhecido por número de Neper ou de **Napier**(em francês) [18] e pode até provar-se que "*são mais*" os números transcendentes que os racionais [19]. O problema viria a ser definitivamente resolvido por **F. Lindemann** (1852-1939) em 1882 ao demonstrar que π é um número transcendente.

* Lindemann começou por demonstrar que se **x é um número algébrico diferente de zero então e^x é irracional**. Como da fórmula de **Euler** $e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen} x$ para $x = \pi$ vem $e^{i\pi} = -1$, então como -1 é racional $i\pi$ e consequentemente π são transcendentes.

A questão da constructibilidade

Para terminar, abordemos agora a questão da constructibilidade de π. Ela tem a ver com a possibilidade ou impossibilidade de, dada uma unidade de comprimento, construir um segmento de comprimento π, ou seja, dado um segmento [PQ] de comprimento igual a 1, construir um outro segmento [AB] tal que $\overline{AB} = \pi.\overline{PQ}$, utilizando apenas régua não graduada e compasso [20]. A constructibilidade de π está relacionada com o problema da quadratura do círculo e com a questão de π ser algébrico ou transcendente. De facto, "*quadrar*" um círculo de raio r consiste em determinar o lado *l* do quadrado cuja área é igual à do círculo, isto é tal que

$$l^2 = \pi r^2$$

ou seja

$$l = r\sqrt{\pi}$$

pelo que, se for possível construir um número transcendente, neste caso, talvez seja possível construir πr^2.

Dados dois segmentos de comprimentos x e y, é fácil proceder a construções de outros segmentos de comprimento $x+y$, $x-y$, $x.y$, x/y e $\sqrt{x}$. Estas construções podem aprender-se em muitos livros de geometria elementar e para as executar basta uma régua não graduada e um compasso. A partir delas podemos construir todos os números racionais, todas as raízes quadradas e todas as combinações de números racionais ou de raízes quadradas. Podemos construir mais alguns números? A resposta é negativa! De facto a teoria da constructibilidade diz-nos exactamente que apenas podemos construir os números algébricos que são combinações finitas de números racionais e de raízes quadradas. Assim é construível $\sqrt[8]{2}$ pela construção sucessiva de $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$, mas não é construível $\sqrt[3]{2}$. Como π não é algébrico não é construível só com régua não graduada e compasso, tal como também não o é $\sqrt{\pi}$ e consequentemente o problema da quadratura do círculo não tem solução.

Como se pode agora comprovar, a demonstração de **Lindemann** revelou-nos o último segredo sobre o número π e esclareceu definitivamente o problema da quadratura do círculo. Com ela terminou um trabalho de 2500 anos mas não encerrou o clube dos quadradores já que, de vez em quando, aparece um novo membro!

≈ 2000 a.C.	babilónios usam $\pi = 3\frac{1}{8}$
≈ 2000 a.C.	egípcios usam $\pi = (16/9)^2 = 3{,}160\,5$
séc. XII a.C.	chineses usam $\pi = 3$
≈ 550 a.C.	Bíblia menciona $\pi = 3$
≈ 440 a.C.	Anaxágoras tentar resolver o problema da quadratura do círculo
≈ 434 a.C.	Anaxágoras tenta "quadrar" o círculo
século III a.C.	Arquimedes estabelece $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ e $\pi \approx \frac{211875}{67441} = 3{,}14163$
Século III d.C.	Chung Hing usa $\pi = \sqrt{10} \approx 3{,}16...$
263 d.C.	Liu Hui usa $\pi = \frac{157}{50} = 3{,}14$
Século V	Tsu Chung-Chi estabelece $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$
≈ 500	Aryabhatta usa $\pi \approx \frac{62832}{2000} = 3{,}1416$
Século VI	Brahmagupta usa $\pi = \sqrt{10} = 3{,}16...$
1220	Leonardo de Pisa (Fibonacci) chega a $\pi \approx 3{,}141818$
antes de 1436	Al-Kashi calcula π com 14 decimais
1593	Viète exprime π como um produto infinito irracional
1593	Adrianus Romanus calcula π com 15 decimais
1596	Ludolph van Ceulen calcula π com 35 decimais
1621	Snelluis introduz refinamentos no método arquimediano
1654	Huygens demonstra a validade do método de Snellius
1655	Wallis exprime π como um produto infinito de racionais e Brouncker exprime π como uma fracção contínua
1665	Newton descobre o cálculo infinitesimal e calcula π com pelo menos 16 decimais
1671	Gregory desenvolve em séria a função arctg
1674	Leibniz exprime π a partir da série da função arctg
1705	Sharp calcula π com 72 decimais
1706	Machin calcula π com 100 decimais
1719	De Lagny calcua π com 127 decimais
1748	Euler exprime π e π^2 através de diversas séries infinitas
1755	Euler exprime π através de um processo de convergência rápida baseado na série do arcotangente
1766	Lambert demonstra a irracionalidade de π
1775	Euler sugere que π é um número transcendente

1794	Legendre confirma a irracionalidade de π e demonstra a de π^2
1844	Strassnitzky e Dase calculam π com 200 decimais
1855	Richter calcula π com 500 decimais
1873-1874	Shanks calcula π com 707 decimais
1882	Lindemann prova que π é transcendente
1945	Ferguson encontra erros no cálculo de Shanks a partir da 527ª casa decimal
1946	Ferguson calcula π com 620 decimais
1949	o ENIAC calcula π com 2037 decimais
1954	o NORC calcula π com 3089 decimais
1959	π é calculado com 16167 decimais com um IBM 704
1961	Shanks e Wrench calculam π com 100000 decimais com um IBM 7090
1966	π é calculado com 250000 decimais com um IBM 7030
1967	π é calculado com 500000 decimais com um CDC 6600
1988	Yasumasa Kanada calcula π com 201326000 decimais

Nota: este quadro cronológico baseou-se no apresentado por Beckmann [1] p.p. 196-197. É um quadro que ilustra apenas alguns dos momentos vividos ao longo da história do número π. Existem muitos quadros cronológicos deste tipo, alguns com cerca de duas mil entradas!

NOTAS

(1) É este o valor que se encontra na Bíblia numa referência existente no Livro dos Reis.

(2) Assim denominado por ter sido encontrado pelo antiquário escocês Henry Rhind, mas também conhecido por papiro de Ahmes, nome do escriba egípcio que o copiou do original cerca de 1650 a.C.

(3) Daqui vem a regra usada pelos egípcios para calcular a área de um círculo: **tomar o diâmetro do círculo, subtrair-lhe uma nona parte e levantar ao quadrado.**

(4) Para um estudo mais atento desta questão veja-se [6], p. 44-46.

(5) Arquimedes recorreu ao hexágono porque tem a particularidade de o seu lado ser igual ao raio da circunferência que lhe está circunscrita.

(6) De cujo nome derivaram as palavras algoritmo e algarismo que hoje usamos.

(7) Excepto a de Leonardo de Pisa, o famoso Fibonacci, que em 1220 publicou um livro de álgebra onde atribui a π o valor 964/275 = 3,141818.

(8) [1] p.78.

(9) O leitor menos dado à matemática poderá prescindir da leitura dos parágrafos iniciados desta forma.

(10) A convergência da fórmula de Viète só foi demonstrada por Rudio em 1891.

(11) Johann Martin Zacharias Dase, famoso calculador alemão que era um prodígio em cálculo mental. Sobre ele se diz que multiplicava mentalmente dois números de 8 algarismos em 54 segundos, dois números de 20 algarismos em 6 minutos e dois de 100 algarismos em 8 horas e 45 minutos !!! [1] p. 105.

(12) Em 1945 descobriu-se que aquele cálculo apresentava erros a partir da 527ª casa decimal.

(13) George Louis Leclerc, Conde de Buffon, eminente cientista francês autor de uma história natural em 36 volumes, que chocou o mundo do seu tempo ao calcular a idade da Terra em 75000 anos em vez dos 6000 geralmente aceites.

(14) Ao lançarmos uma moeda ao ar a probabilidade de sair **cara** ou de sair **corôa** é de 1/2, o que não quer dizer que

em 10 lançamentos tenhamos forçosamente 5 **caras** e 5 **corôas**. Contudo, se o número de lançamantos for muito grande, os números de **caras** e de **corôas** serão próximos de 50% do de lançamentos. De igual forma, à medida que o número de lançamentos da agulha aumenta, a razão entre o número de intersecções e o número de lançamentos tende para P

(15) [1] p.163

(16) Para uma leitura completa da notícia veja-se o Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática nº12, de Março de 1989, p.80.

(17) Um número diz-se racional se se pode representar sob a forma de uma fracção. É o caso de $2=2/1$, $0{,}25=1/4$, $0{,}33333...=1/3$. A dízima correspondente a estes números é finita(caso de 0,25) ou infinita periódica(caso de $1/3=0{,}3333...$). Se um número não é racional diz-se irracional, não é representável por uma fracção e corresponde-lhe uma dízima infinita não periódica. É o caso de $\sqrt{2}=1{,}414213562...$

(18) Nome do matemático escocês que o determinou pela primeira vez.

(19) Uma demonstração pode encontrar-se em [6] pp. 193-204.

(20) Esta restrição vem da antiga Grécia onde uma boa solução para um problema de geometria não deveria exigir mais do que uma régua não graduada e um compasso.

BIBLIOGRAFIA

[1] **BECKAMANN, Petr**, *A Hystory of Π*, St. Martin's Press, N.Y., 1971

[2] **BOYER, Carl**, *A Hystory of Mathematics*, 2ª Edição, John Wiley & Sons Inc., N.Y. 1991

[3] **CARAÇA, Bento de Jesus**, "O Número Π", in **Gazeta de Matemática** nº 22, Lisboa, Março de 1944.

[4] **ENGEL, Arthur**, *Mathematique et Informatique*, cedic/nathan, Paris, 1985.

[5] **EVES, Howard**, *An Itroduction to the History of Mathematics*, 5ª edição, Saunders College Pub. 1983.

[6] **NIVEN, Ivan**, *Números Racionais e Irracionais*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1984.

[7] **ROBINS, Jaine Carvalho**, "Π À Moda de Arquimedes", in **Jornal de Matemática Elementar**, nº 105, Lisboa, Fevereiro de 1991.

[8] **STRUIK, J.**, *História Concisa das Matemáticas*, Gradiva, Lisboa, 1989.